И. И. КРАСНОРЫЛОВ
Ю. В. ПЛАХОВ

ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

И. И. КРАСНОРЫЛОВ,
Ю. В. ПЛАХОВ

ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов геодезических специальностей вузов

Москва «Недра» 1976

УДК 528 : 629.195 (07)

Краснорылов И. И., Плахов Ю. В. Основы космической геодезии. М., «Недра», 1976. 216 с.

Книга написана для студентов геодезических специальностей вузов в соответствии с программой курса «Основы космической геодезии». Книга состоит из введения и семи глав. В гл. I излагаются координатная проблема и системы измерения времени. В гл. II рассматривается теория движения ИСЗ. В ней говорится о кеплеровском и возмущенном движении спутников, содержатся сведения о вычислении эфемерид и уточнении орбит. В гл. III даны элементы спутниковой сферической астрономии. О методах и аппаратуре для наблюдений ИСЗ и предварительной обработке результатов наблюдений идет речь в гл. IV книги. Геометрические и динамические задачи являются предметом рассмотрения в V и VI главах. В этих главах приводятся также сведения об уточнении некоторых фундаментальных постоянных астрономии и геодезии. Основные результаты, достигнутые в космической геодезии, сообщаются в гл. VII.

Книга может быть также использована аспирантами соответствующих специальностей, инженерно-техническими работниками, которые трудятся над геодезическими аспектами использования искусственных спутников Земли.

Табл. 7, ил. 58, список лит.— 75 назв.

К $\frac{20701-270}{043(01)-76}$ 86—76

Игорь Ильич Краснорылов
Юрий Васильевич Плахов

ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Редактор издательства *Л. Г. Иванова*
Обложка художника *Б. К. Силаева*
Художественный редактор *В. В. Евдокимов*
Техн. редактор *З. А. Болдырева*
Корректор *В. В. Мухина*

Сдано в набор 11/II—1976 г. Подписано в печать 30/IV—1976 г. Т-09249 Формат 60×90^1/$_{16}$
Бумага № 1. Печ. л. 13,5 Уч.-изд. л. 12,78 Тираж 4700 экз. Заказ № 1651/5090-15 Цена 45 коп.

Издательство «Недра», 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19.
Московская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу учебного пособия положены курсы лекций по космической геодезии и небесной механике, которые авторы в течение ряда лет читают студентам геодезического факультета Московского института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии (МИИГАиК).

К настоящему времени издан ряд монографий советских и зарубежных авторов, посвященных как космической геодезии в целом, так и отдельным ее разделам.

Несмотря на свой, как правило, высокий научный уровень, эти издания не являются учебными пособиями. В некоторых из них рассматриваются отдельные вопросы космической геодезии, другие сложны для студентов или содержат в большом объеме результаты конкретных исследований, т. е. представляют, главным образом, производственный интерес.

Все эти обстоятельства побудили авторов написать данное учебное пособие.

Следует отметить, что из-за ограниченного объема книги авторы не смогли достаточно полно изложить ряд вопросов, а некоторые вынуждены были исключить вообще. Это, в частности, относится к такому важному вопросу (хотя он и упоминается), как совместное использование наземных и спутниковых данных. Хотя этот вопрос, с принципиальной точки зрения, может быть отнесен к курсу теоретической геодезии, авторы убеждены, что в курсе космической геодезии он также заслуживает внимания. По причине ограниченного объема книги пришлось исключить параграф, посвященный изучению геопотенциала по наблюдениям лучевых ускорений спутников. Конспективно изложены отдельные вопросы небесной механики.

Свою главную задачу авторы видели в том, чтобы дать студентам достаточную научную методологическую основу как для работы на производстве, так и для дальнейшего повышения своей квалификации. По этой причине в отдельных случаях рассматривались вопросы, имеющие в основном методическое значение, а также методы, которые в настоящее время не могут по тем или иным причинам конкурировать с другими, однако в принципе могут совершенствоваться и получить в дальнейшем более широкое применение.

Надо также отметить, что используемая в космической геодезии терминология к настоящему времени еще окончательно не утвердилась. По этой причине подразделение задач космической геодезии, классификацию камер для наблюдений спутников можно считать в известной мере условной.

Введение и главы III, IV, V, VII пособия написаны И. И. Краснорыловым, главы I, II, VI — Ю. В. Плаховым.

ВВЕДЕНИЕ

Космическая (спутниковая) геодезия — раздел геодезической науки, в котором для решения научных и практических задач геодезии используются результаты наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ), космических аппаратов (КА) и Луны.

В соответствии с этим космическая геодезия рассматривает теорию использования Луны, ИСЗ и КА для решения геодезических задач, способы определения и уточнения орбит и вычисления эфемерид, требования к геодезическим спутникам в отношении параметров их орбит и состава бортовой аппаратуры, требования к расположению станций слежения и их аппаратурному оснащению, инструменты и методы наблюдений спутников, а также вопросы обработки и интерпретации полученных результатов.

Основными задачами космической геодезии являются:

1) определение взаимного положения пунктов в некоторой геодезической системе координат;

2) определение положений центров референц-эллипсоидов (местных систем координат) относительно центра масс Земли;

3) определение координат пунктов в абсолютной системе, отнесенной к центру масс Земли, и создание в перспективе единой мировой геодезической системы;

4) установление связи между отдельными геодезическими системами;

5) изучение внешнего гравитационного поля и формы Земли;

6) уточнение некоторых фундаментальных геодезических постоянных.

Методы космической геодезии имеют существенные преимущества при решении некоторых задач по сравнению с традиционными. Прежде чем говорить об этих преимуществах, обратимся к истории геодезии.

Важное значение для развития геодезических работ с целью решения научных и практических задач имело применение Снеллиусом в начале XVII в. триангуляции. С 1614 по 1616 г. Снеллиус выполнил в Голландии градусное измерение по дуге меридиана, состоящее из 33 треугольников и имеющее протяженность около 130 км. Метод триангуляции являлся с тех пор в течение трех с половиной столетий основным при создании геодезического обоснования. В XX веке наряду с триангуляцией стала применяться полигонометрия. Ее применение стало особенно широким после внедрения в геодезическое производство свето- и радиодальномеров.

Эти традиционные геодезические построения создаются на отдельных, часто разделенных значительными водными преградами, территориях и образуют *референцные геодезические системы* (референц-эллипсоиды: Бесселя, Кларка, Хейфорда, Красовского и т. д.). Положение референц-эллипсоидов, образующих геодезические системы на разных континентах, относительно друг друга и центра масс Земли нельзя установить при помощи только триангуляции и полигонометрии. Другими словами, нельзя методом триангуляции (полигонометрии) осуществить геодезическую связь всех материков в единую мировую геодезическую систему.

Ограниченные возможности классических методов обусловлены сравнительно небольшими предельными длинами отдельных сторон триангуляции и полигонометрии. Так, например, предельная длина стороны триангуляции вычисляется по формуле

$$D_{\text{пред}} = 3{,}89 \text{ км} \left(\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}\right),$$

где H_1 и H_2 — высоты пунктов наблюдений над уровнем моря в метрах. Согласно этой формуле при $H_1 = H_2 = 1600$ м имеем $D_{\text{пред}} = 310$ км, а при $H_1 = H_2 = 2500$ м $D_{\text{пред}} = 389$ км.

Стремление преодолеть возникающие при больших расстояниях трудности привело к созданию в 20-е годы XX в. *динамической триангуляции,* в которой из-за отсутствия прямой видимости между пунктами ведутся синхронные наблюдения подвижных визирных целей (ПВЦ). Таким образом была осуществлена связь Европы и Африки через о. Крит, Англии и Франции, Дании и Норвегии, Гаити, Кубы и Ямайки с материком Сев. Америки.

Дальность передачи при этом определяется формулой

$$D_{\text{пред}} = 7{,}78 \left(\sqrt{H_{\text{ср}}} + \sqrt{H_{\text{ПВЦ}}}\right).$$

При $H_{\text{ср}} = 1600$ м и $H_{\text{ПВЦ}} = 3600$ м $D_{\text{пред}} = 778$ км.

Еще больше расширились возможности при использовании самолетных радиогеодезических систем. Так, например, в способе пересечения створа дальность связи определяется формулой

$$D_{\text{пред}} = 8{,}30 \left(\sqrt{H_{\text{ср}}} + \sqrt{H_{\pm}}\right).$$

Единая система координат, отнесенная к центру масс Земли, может быть создана на основе совместного использования результатов астрономо-геодезических и гравиметрических работ в рамках теории М. С. Молоденского. При этом требуется весьма густая сеть гравиметрических пунктов, распределенных с необходимой плотностью по всей Земле (как на суше, так и на море).

Одновременно с совершенствованием традиционных геодезических методов создавались предпосылки для развития космической геодезии.

Вопрос об использовании наблюдений Луны в геодезических целях изучался еще Иоганном Альбрехтом Эйлером (1768 г.). В своей работе «Versuch die Figur der Erden durch beobachtungen des Monds zu bestimmen» (Abh. Churfürstlich — baierischen Akad. Wiss., 5) он обосновал, что из одновременных наблюдений Луны в нескольких пунктах, расположенных на одном меридиане, можно определить расстояние от каждого пункта до Луны. При большом количестве таких пунктов оказывалось возможным определять размеры земного меридианного эллипса, т. е. изучать геометрическую фигуру Земли.

«Лунными методами» занимались Лаплас, Гельмерт и другие ученые.

Зарождение космической геодезии как раздела геодезической науки следует отнести к началу XX в.

В 1902 г. Г. Баттерманн предложил наблюдать для целей геодезии покрытия звезд Луной. В проведенном им эксперименте наряду с элементами лунной орбиты определялись геоцентрические широта и долгота места наблюдений.

В 1929 г. Т. Банахевич (Польша) разработал метод, основанный на использовании наблюдений солнечных затмений. Большой вклад в разработку теории затмений внес акад. А. А. Михайлов (СССР, 1945 г.). Дальнейшая разработка этого вопроса принадлежит В. Ламберту (США, 1949 г.) и А. Берроту (ФРГ, 1949 г.).

В основе геодезического применения наблюдений покрытий и солнечных затмений лежит использование теории параллакса. Значительное удаление Луны от Земли (в среднем 384 000 км) не позволяет достичь с помощью этих методов высокой точности. Следует к тому же учесть, что затмения происходят редко, захватывают ограниченные территории на поверхности Земли, кроме того, сами наблюдения затмений и покрытий не отличаются высокой точностью. Между тем ошибка эфемеридного времени в 0,1 *s* приводит к ошибке в положении пункта примерно 100 м. Существенно влияет также недостаточно надежное знание топографии края лунного диска, особенно при использовании покрытий. Указанные обстоятельства привели к тому, что методы, основанные на использовании солнечных затмений и покрытий звезд, практически не нашли применения в геодезии.

Более точные результаты позволяет получить фотографирование Луны на фоне звезд. Этот метод стал применяться после создания специальных лунных камер, позволяющих получать на одном негативе изображения звезд и гораздо более яркого, быстро перемещающегося объекта — Луны.

В 1954 г. такие камеры, отличающиеся принципиально по своей конструкции, были созданы в Пулковской обсерватории (А. А. Михайлов) и в Морской обсерватории в Вашингтоне (В. Марковиц).

Фотографические наблюдения Луны позволяют получить топоцентрические координаты точек ее поверхности. Эти наблюдения можно рассматривать как частный случай покрытия, когда покрываемая звезда совпадает с видимым центром фигуры Луны. Получая с помощью лунных эфемерид геоцентрические координаты Луны и ее параллакс, можно определить далее геоцентрические координаты пункта наблюдений. Производя фотографические наблюдения на нескольких станциях, относящихся к одной референцной системе, можно определить положение центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли.

Расчеты показывают, что ошибка определения топоцентрических координат Луны, равная 0,1″, приводит к ошибке в координатах пункта наблюдений около 200 м, т. е. и этот метод в настоящее время мало пригоден для геодезистов.

Однако отметим, что на основе фотографических наблюдений Луны решается одна из важнейших задач астрометрии — определение эфемеридного времени.

Исключительно важное значение для развития теории и практики космической геодезии имело предложение финского геодезиста Вяйсяля (1946 г.) фотографировать с двух пунктов синхронно какую-либо визирную цель на фоне звездного неба. В качестве такой цели могут использоваться лампы-вспышки, установленные на шарах-пилотах, самолетах, аэростатах и т. д. В результате оказывалось возможным определить направление хорды, связывающей пункты наблюдений. В 1959 г. в соответствии с предложением Вяйсяля было определено направление хорды, соединяющей пункты в обсерваториях Турку и Хельсинки. Расстояние между этими пунктами составляло 154 км, направление хорды получилось с ошибкой 1,2″.

После успешного завершения эксперимента стало ясно, что способ, предложенный Вяйсяля, позволяет создавать специальную триангуляцию, которая получила название *звездной* или *астрономической*. Определив направления хорд, соединяющих все пункты наблюдений, располагая координатами одного из пунктов и хотя бы одним базисом, можно вычислить координаты всех пунктов в системе исходного.

Дальнейшее совершенствование звездной триангуляции позволило в последние годы успешно применить ее в Финляндии для определения направлений хорд при расстояниях между пунктами 150—250 км. Для транспортировки вакуумных ламп-вспышек при этом использовали метеорологические баллоны, обеспечивающие подъем источников света на высоту 30—40 км. Иногда такого рода построения называют *баллонной триангуляцией.* С 1969 по 1971 г. методом баллонной триангуляции были определены направления хорд, образующих треугольник Tuorla — Nünisalo — Naulakallio (стороны 158, 229 и 149 км) [68]. После уравнивания ошибка направления составила 0,3″, а невязка в треугольнике 0,7″.

Упомянутые работы убедительно доказали, что при сторонах 100—300 км звездная (баллонная) триангуляция позволяет получать результаты высокой точности. Такие построения особенно важны при соединении классической и спутниковой триангуляций.

Вместе с тем следует отметить сложность организации подобных наблюдений из-за постоянного дрейфа баллонов-носителей. Звездная триангуляция не может также конкурировать со спутниковой при больших расстояниях между пунктами.

Бурно развиваться космическая геодезия стала только после запуска 4 октября 1957 г. в Советском Союзе первого искусственного спутника Земли. Отсюда и частое употребление термина спутниковая геодезия. Количество запускаемых в космос объектов постоянно возрастает. Так, например, за первые 10 лет было запущено более 600 космических объектов К 1975 г. это число превысило 3000. Кроме ИСЗ сюда входят автоматические межпланетные станции (АМС), пилотируемые космические корабли, искусственные спутники Луны (ИСЛ) и т. д.

Из большого количества запускаемых на орбиты ИСЗ особо важное значение имеют для геодезии специальные геодезические ИСЗ.

Наблюдения ИСЗ дают возможность быстрой передачи координат на расстояния в несколько тысяч километров и создания построений в абсолютной системе координат, отнесенной к центру масс Земли. Определение основных параметров гравитационного поля по наблюдениям искусственных спутников требует сравнительно небольшого числа станций на поверхности Земли, в то время как при традиционных методах требуется густая сеть пунктов на суше и на море. Характеристики гравитационного поля в первом случае получаются гораздо надежнее, чем традиционными методами.

Повышение точности лазерных наблюдений создает предпосылки для использования наблюдений спутников при изучении дрейфа континентов и движения земных полюсов. Особенно полезными могут оказаться при этом стационарные ИСЗ, оснащенные уголковыми отражателями. Для решения этих задач можно использовать также отражатели, установленные на Луне. Для определения координат полюса уже в настоящее время успешно применяют допплеровские наблюдения.

Применение спутникового динамического метода позволит исследовать возможные изменения гравитационного поля Земли во времени, а также определить фигуру геоида в океанах, причем успешное решение последней задачи обеспечат высокоточные высотомеры.

Задачи космической геодезии тесно связаны с проблемами картографирования Земли из космоса, с различными видами съемок ее поверхности, что весьма важно для получения планетарных характеристик Земли и изучения ее природных ресурсов.

Обобщением и развитием задач и методов космической геодезии является использование искусственных спутников Луны и планет для изучения этих объектов геодезическими методами: создание опорных сетей, определение параметров гравитационных полей и формы, составление топографических и специальных карт.

Методы решения задач космической геодезии обычно подразделяют на *геометрические* и *динамические*. В первом случае спутник используется как высокая визирная цель и не требуется знать с большой точностью теорию его движения. При реализации геометрических методов используют синхронные или квазисинхронные наблюдения ИСЗ с нескольких пунктов. В динамических методах теории движения ИСЗ используются в качестве основы для вывода по результатам наблюдений ИСЗ параметров гравитационного поля Земли и определения координат пунктов в абсолютной системе координат, отнесенной к центру масс Земли.

На рис. 1, *а*: $\bar{r}$ — геоцентрический радиус-вектор ИСЗ; $\bar{r}'$ — топоцентрический радиус-вектор ИСЗ; $\bar{R}$ — радиус-вектор пункта M, отнесенный к центру O_r некоторого референц-эллипсоида; $\Delta\bar{R}$ — вектор, связывающий положение центра референц-эллипсоида O_r (начало геодезической системы) с центром масс Земли O.

Векторы $\bar{r}$, $\bar{r}'$, $\bar{R}$ и $\Delta\bar{R}$ связаны соотношением

$$\bar{r} = \bar{r}' + \bar{R} + \Delta\bar{R}, \tag{1}$$

которое является фундаментальным *уравнением космической геодезии*.

Одним из этапов при решении задач космической геодезии может являться *определение положений* ИСЗ (*прямая задача*). Решается эта задача с помощью уравнения (1), если известны координаты пункта наблюдений M (т. е. компоненты вектора $\bar{R}$) и для некоторого момента времени определены все три компоненты топоцентрического вектора $\bar{r}'$. При этом положение ИСЗ будет определено в той системе координат, в какой заданы координаты пункта наблюдений.

При использовании геодезических координат пунктов (система референц-эллипсоида) возникает еще задача определения положения его центра относительно центра масс Земли, т. е. определения вектора $\Delta\bar{R}$ в уравнении (1).

Гораздо чаще в космической геодезии приходится рассматривать вопрос об *определении координат пунктов наблюдений (обратная задача)*.

В этом случае уравнение (1) будет иметь вид

$$\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}' - \Delta\bar{R}. \tag{2}$$

Задачу можно решить, если для некоторого момента известен из теории движения геоцентрический радиус-вектор

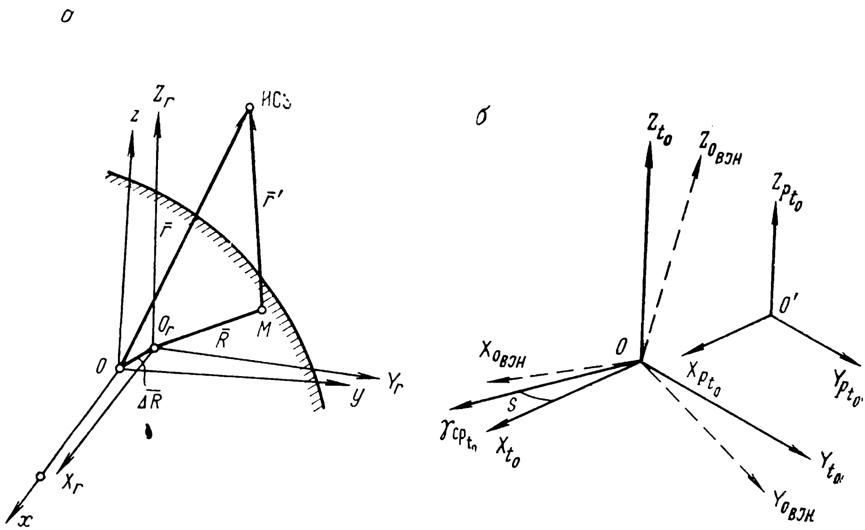

Рис. 1.

а — обоснование использования наблюдений ИСЗ в геодезии; *б* — гринвичские и равноденственные системы координат

ИСЗ $\bar{r}$ и для этого же момента на пункте M получены по результатам наблюдений все три компоненты топоцентрического радиуса-вектора $\bar{r}'$, а также известен вектор $\Delta\bar{R}$.

Для создания геодезических построений широко применяются синхронные и квазисинхронные наблюдения ИСЗ. Если для некоторого момента на пунктах M_1 и M_2 синхронно определены компоненты топоцентрических векторов $\bar{r}_1'$ и $\bar{r}_2'$ ИСЗ, то получаем два векторных уравнения

$$\left.\begin{aligned} \bar{R}_1 &= \bar{r} - \bar{r}_1' - \Delta\bar{R} \\ \bar{R}_2 &- \bar{r} - \bar{r}_2' - \Delta\bar{R} \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

откуда

$$\bar{R}_1 - \bar{R}_2 = \bar{r}_2' - \bar{r}_1'. \tag{4}$$

Если координаты одного из пунктов заданы, то уравнение (4) дает возможность получить координаты другого пункта в системе исходного.

Динамический метод космической геодезии заключается в совместном определении параметров гравитационного поля Земли, элементов орбит и координат пунктов наблюдений по совокупности измерений, выполняемых на пунктах.

Геоцентрический радиус-вектор ИСЗ есть сложная функция элементов орбиты E_i, параметров ψ_k гравитационного поля и времени

$$\bar{r} = \bar{r}(E_i, \psi_k, t). \tag{5}$$

Поскольку измеренными величинами в общем случае можно считать топоцентрические радиусы-векторы, то в обобщенной форме можно написать

$$\bar{r}' = \bar{r}(E_i, \psi_k, t) - \bar{R}. \tag{6}$$

Линеаризируя уравнение (6) и полагая безошибочными моменты регистрации времени, получим

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial E_i} \Delta E_i + \frac{\partial \bar{r}'}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial \psi_k} \Delta \psi_k - \frac{\partial \bar{r}'}{\partial \bar{R}} \Delta \bar{R} + (\bar{r}'_0 - \bar{r}'_{\text{изм}}) = \bar{v}_r, \tag{7}$$

где ΔE_i, $\Delta\psi_k$, $\Delta\bar{R}$ — соответственно поправки к элементам орбиты, параметрам гравитационного поля и координатам пунктов,

$\bar{r}_0'$ — приближенное значение топоцентрического радиуса-вектора,

$\bar{v}_r$ — вероятнейшая поправка измеренной величины.

В частном случае, когда не определяются поправки к принятой модели гравитационного поля, надо положить $\psi_k = 0$, тогда получим основное уравнение *орбитального метода*

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{r}'}{\partial E_i} \Delta E_i - \frac{\partial \bar{r}'}{\partial \bar{R}} \Delta \bar{R} + (\bar{r}'_0 - \bar{r}'_{\text{изм}}) = \bar{v}_r, \tag{8}$$

в котором предполагаются известными возмущающие силы, действующие на ИСЗ, и ставится задача совместного определения элементов орбиты и координат пунктов.

Наконец, полагая известными для моментов измерений и элементы орбиты E_i, получим основное уравнение *упрощенного орбитального метода*

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial \bar{R}} \Delta \bar{R} + (\bar{r}'_0 + \bar{r}'_{\text{изм}}) = \bar{v}_r. \tag{9}$$

В последнем случае ставится задача определения лишь координат пунктов, а элементы орбиты и параметры гравитационного поля предполагаются известными.

В ряде случаев говорят о геометрических и динамических задачах космической геодезии. Решение первых осуществляется на базе синхронных и квазисинхронных наблюдений, что позволяет получать относительные координаты пунктов. Для решения динамических задач привлекается теория движения ИСЗ и, кроме координат (абсолютных) пунктов, получают также параметры гравитационного поля Земли.

Такая классификация является условной. Выше, например, было показано, что в орбитальном методе модель гравитационного поля не уточняется, но для определения координат пунктов (в абсолютной системе) привлекается теория движения спутника, необходимая для получения поправок к элементам орбиты.

В дальнейшем при изложении материала задачи космической геодезии подразделялись на геометрические и динамические.

Поскольку определение элементов орбиты в орбитальном методе не является самоцелью, этот метод и его модификации отнесены к геометрическим задачам.

За время, прошедшее после запуска в СССР первого искусственного спутника, особенно большие успехи достигнуты в решении динамических задач космической геодезии. Наши знания о параметрах гравитационного поля и форме Земли значительно увеличились. По параметрам, характеризующим гравитационное поле, оказалось возможным составить суждение об определенных свойствах формы уровенной поверхности, о геофизических свойствах земной коры и мантии Земли.

Совершенствуются методы решения геометрических задач космической геодезии. Наличие в ряде стран разнообразной измерительной аппаратуры, обеспечивающей высокую точность наблюдений, позволило перейти к работам в рамках международного сотрудничества (проекты JSAGEX, «Большая хорда» и т. д.).

Ведущая роль Советского Союза в исследовании космического пространства общеизвестна. Достаточно напомнить, что первый спутник был запущен в СССР, первым землянином, совершившим орбитальный космический полет, был Ю. А. Гагарин. Первым вышел в открытый космос А. А. Леонов. Советскому Союзу принадлежит также приоритет в таких основополагающих этапах в истории развития мировой космонавтики, как достижение поверхности Луны, передача изображения поверхности Луны на Землю, запуск КА к Венере, запуск КА к Марсу, мягкая посадка на Луну, искусственный спутник

Луны, создание орбитальной космической станции (ОКС), создание лунохода и т. д.

Развитие космических исследований особенно важно потому, что они способствуют научно-техническому прогрессу, дают огромный материал для развития наших знаний о Вселенной и отдельных ее частях, влияют на развитие культуры и имеют народнохозяйственное значение (космическая связь, космическая метеорология, навигация, изучение природных ресурсов, космическая геодезия и т. д.).

В настоящее время советская программа изучения и использования космического пространства успешно выполняется. Важное значение в ней придается развитию теории и практики космической геодезии.

Глава I

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Эта глава имеет справочный характер и служит необходимым введением к дальнейшему тексту. Содержание главы основано на известных положениях сферической астрономии и частично — высшей геодезии.

§ 1. Основные системы координат, применяемые в космической геодезии

Исходной системой координат, в которой задаются положения станций наблюдений ИСЗ, является *геодезическая,* определяемая принятым на данной территории референц-эллипсоидом. В этой системе координаты точек земной поверхности задаются геодезической широтой B, определяемой как угол между нормалью к эллипсоиду, проходящей через данную точку, и плоскостью экватора эллипсоида; геодезической долготой L — двугранным углом между плоскостью, проходящей через пункт и малую ось эллипсоида, и плоскостью начального меридиана, также проходящей через малую ось эллипсоида; высотой H над эллипсоидом. Референц-эллипсоид ориентируют так, чтобы его малая ось была параллельна средней оси вращения Земли в некоторую стандартную эпоху. Учет или неучет уклонений отвеса в исходном пункте приводит лишь к параллельному перемещению референц-эллипсоида в пространстве. Поэтому будем считать, что плоскость начального меридиана референц-эллипсоида параллельна плоскости среднего гринвичского меридиана, определяемой Гринвичем и положением средней оси вращения Земли на стандартную эпоху t_0. Строго говоря, указанная параллельность до некоторой степени не соблюдается, но этот «перекос» систем подлежит определению (или уточнению) из решения задач космической геодезии.

Так как космическая геодезия позволяет решать геодезические задачи в масштабах всей Земли, то иногда в качестве исходного целесообразно использовать общий земной эллипсоид, рекомендованный XIII Генеральной ассамблеей Международного астрономического союза (1967 г.) . Принято, что центр этого эллипсоида совпадает с центром масс Земли, а малая ось совпадает со средней осью вращения Земли для средней эпохи 1900—1905 г. (система ОС1).

Решение задач космической геодезии основано на реализации определенных математических соотношений между координатами ИСЗ и координатами станций наблюдений. Наиболее простой вид эти соотношения имеют, если они заданы в прямоугольных координатах. Поэтому координаты станций целесообразно представлять в прямоугольной системе координат. Эти системы показаны на рис. 1, *б*, где O' — центр референц-эллипсоида; O — центр масс Земли; $X_{P_{t_0}}$, $Y_{P_{t_0}}$, $Z_{P_{t_0}}$ — геодезическая прямоугольная система координат, связанная с референц-эллипсоидом (референцная система); X_{t_0}, Y_{t_0}, Z_{t_0} — прямоугольная система координат, связанная с центром масс Земли; OZ_{t_0} — средняя ось вращения Земли для эпохи t_0 г., X_{t_0}; OZ_{t_0} — плоскость среднего гринвичского* меридиана для эпохи t_0; ось $O'Z_{Pt_0}$ параллельна OZ_{t_0}, плоскость начального меридиана $X_{P_{t_0}}$ $O'Z_{P_{t_0}}$ параллельна плоскости X_{t_0} OZ_{t_0}; $X_{0(BIH)}$, $Y_{0(BIH)}$, $Z_{0(BIH)}$ — оси геодезической прямоугольной системы, связаной с общим земным эллипсоидом; $OZ_{0(BIH)}$ — направление средней оси вращения Земли для средней эпохи 1900—1905 г. Несовпадение направлений OZ_{t_0} и $OZ_{0(BIH)}$ обусловлено действием прецессии за указанный промежуток времени. Координаты звезд в современных звездных каталогах отнесены к стандартной эпохе $t_0=1950{,}0$. Поэтому пользоваться ориентацией общего земного эллипосида не всегда удобно. Учтя действие прецессии за интервал t_0 г. — $\overline{1900,\ 1905}$ совместим оси X_0Y_0 Z_0 с осями $X_{t_0}Y_{t_0}Z_{t_0}$. Поэтому во всех случаях будем пользоваться направлением осей для эпохи t_0. Указанные только что системы прямоугольных координат вращаются вместе с Землей.

Если ось абсцисс x направить в среднюю точку весеннего равноденствия $\Upsilon_{\text{ср.}\,t_0}$, ось z совместить с осью OZ_{t_0}, а ось ординат y, как и в предыдущих случаях, направить так, чтобы система была правой, то получим систему координат xyz, неподвижную относительно вращающейся Земли. Эту систему координат, отвлекаясь от орбитального движения Земли, назовем *инерциальной*. Любую из систем координат, начало которой находится в центре масс Земли O или в центре референц-эллипсоида O' (ибо положение O' относительно O может быть и неизвестным), будем называть *геоцентрической*. Систему, вращающуюся вместе с Землей, когда плоскость XOZ связана

* Здесь и далее под «гринвичским» меридианом понимается начальный меридиан, реализуемый и хранимый Международным бюро времени (*BJH*), приведенный к стандартной эпохе, так как при обработке наблюдений чаще всего приходится пользоваться именно этой эпохой.

с начальным меридианом, назовем *гринвичской**. Таким образом, мы имеем *геоцентрические гринвичские системы* для эпохи $t_0 X_{Pt_0} Y_{Pt_0} Z_{Pt_0}$, $X_{t_0} Y_{t_0} Z_{t_0}$ и геоцентрическую инерциальную систему для эпохи t_0 xyz. Угол $\bar{S}$ между осями X_{t_0} и $x = \Upsilon_{\text{ср.}\, t_0}$ есть среднее гринвичское звездное время, отнесенное к эпохе t_0. Теория движения ИСЗ всегда строится в геоцентрической инерциальной системе координат; в этой же системе предвычисляются теоретические координаты спутников.

Наблюдения ИСЗ проводятся с поверхности Земли, поэтому наблюденные координаты спутников получаются в так называемой *топоцентрической системе координат*, начало которой находится на поверхности Земли в пункте наблюдений (рис. 2).

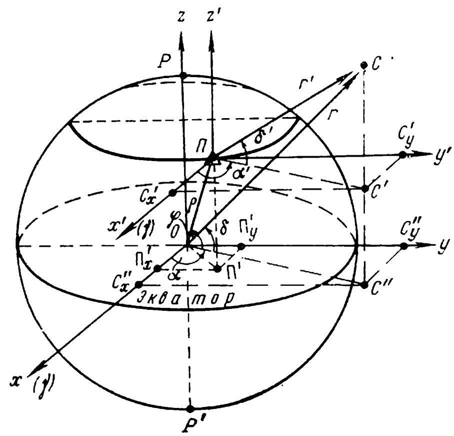

Рис. 2. Геоцентрическая и топоцентрическая системы координат

На рис 2: *0* — **центр** масс Земли — начало геоцентрической системы координат; xyz — оси инерциальной геоцентрической системы, ось x направлена в точку весны, ось z — по оси вращения Земли PP'; П — пункт на поверхности Земли — начало топоцентрической системы $x'y'z'$, оси которой параллельны осям xyz. C — спутник, C' — его проекция на плоскость $x'y'$, C'' — на плоскость экватора xy; r — геоцентрический радиус-вектор C, r' — топоцентрический; α — геоцентрическое прямое восхождение, δ — геоцентрическое склонение C; α', δ' — топоцентрические прямое восхождение и склонение C. $\overline{ПC_x'} = x'$, $\overline{ПC_y'} = y'$, $\overline{CC'} = z'$ — топоцентрические прямоугольные координаты C. $\overline{OC_x''} = x$, $\overline{OC_y''} = y$, $\overline{CC''} = z$ — геоцентрические прямоугольные координаты C. Наконец: $OП_x' = x_П$, $OП_y' = y_П$, $ПП_z' = z_П$ — геоцентрические прямоугольные координаты пункта; ρ — его геоцентрический радиус-вектор.

Экваториальные координаты r, α, δ и r', α', δ' играют роль сферических координат; в данном случае они отнесены к эпохе t_0. Если за исходную систему координат принять гринвичскую,

---

* По зарубежной терминологии — «земная» система. Кроме того, должно быть понятно, что термин «инерциальная» система имеет здесь строго локальный характер.

то аналогичным образом получим топоцентрическую гринвичскую систему координат X', Y', Z'; тогда α и α' следует заменить на $\alpha - \bar{S}$ и $\alpha' - \bar{S}$.

Направив ось z в истинный полюс $P_{\text{ист}}$ заданной даты для заданного момента времени, а ось x — в истинную точку весны $\Upsilon_{\text{ист}}$ для того же момента, получим геоцентрическую систему координат $x_{\text{ист}}$, $y_{\text{ист}}$, $z_{\text{ист}}$ *, которую назовем *равноденственной* (рис. 3).

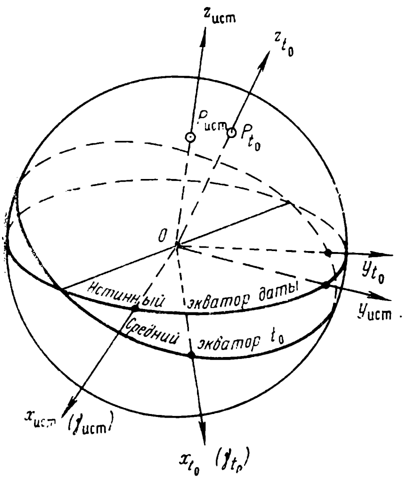

Рис. 3. Инерциальная равноденственная система координат и равноденственная система координат, отнесенная к истинному полюсу

Несовпадение осей инерциальной системы xyz (на рис. 3 — $x_{t_0}y_{t_0}z_{t_0}$) с осями $x_{\text{ист}}$, $y_{\text{ист}}$, $z_{\text{ист}}$ обусловлено действием прецессии и нутации на интервале времени между стандартной эпохой t_0 и заданным моментом. Направив аналогичным образом ось z в мгновенный полюс заданного момента, а ось x — в мгновенную точку весны, получим мгновенную равноденственную систему координат $x_{\text{мгн}}$, $y_{\text{мгн}}$, $z_{\text{мгн}}$.

Несовпадение осей этой системы с осями инерциальной обусловлено действием прецессии и нутации за тот же промежуток времени и движением полюсов Земли.

Совершив параллельный перенос начал систем $x_{\text{ист}}$, $y_{\text{ист}}$, $z_{\text{ист}}$ и $x_{\text{мгн}}$, $y_{\text{мгн}}$, $z_{\text{мгн}}$ в точку на поверхности Земли, получим соответственно топоцентрические равноденственные системы координат $x'_{\text{ист}}$, $y'_{\text{ист}}$, $z'_{\text{ист}}$; $x'_{\text{мгн}}$; $y'_{\text{мгн}}$, $z'_{\text{мгн}}$.

Итак, системы координат можно классифицировать тремя способами: по выбору начала координат — геоцентрические и топоцентрические; по выбору направления оси x — гринвичские и равноденственные (инерциальная система координат, очевидно, тоже является равноденственной для стандартной эпохи); по выбору направления оси вращения Земли и положения точки весны — мгновенные, истинные и средние (инерциальные).

Таким образом, перечислены основные системы координат, с которыми приходится иметь дело на практике. Их число можно расширить, исходя из данной классификации.

---

* По зарубежной терминологии — «звездная» система.

Существует также класс систем координат, играющих вспомогательную роль в теории движения спутников. Эти системы называют орбитальными, так как они тем или иным способом связаны с орбитой спутника. Первая орбитальная система: начало координат находится в центре масс ИСЗ, а оси параллельны осям геоцентрической инерциальной системы координат, либо осям гринвичской системы координат, либо выбраны специальным образом (гл. II § 12); вторая орбитальная система — начало в центре масс Земли, ось x направлена в восходящий узел орбиты ИСЗ, ось z — по средней оси вращения Земли стандартной эпохи; третья орбитальная система: начало — в центре масс Земли, плоскость xy — плоскость орбиты ИСЗ, причем x может быть направлена либо в узел орбиты, либо в перицентр орбиты; ось z перпендикулярна к плоскости орбиты. Можно предложить еще ряд орбитальных систем координат.

Перечисленные системы наиболее употребительны.

§ 2. Системы измерения времени

Будем придерживаться системы изложения, данной в книге [53].

Исходной системой измерения времени, применяемой в космической геодезии, является система всемирного времени — система среднего солнечного времени на гринвичском меридиане. Наиболее употребительные обозначения:

UT (Universal Time) либо TU (Temps Universel).

Из наблюдений звезд в пункте с известной астрономической долготой λ определяют местное звездное время s, т. е. часовой угол точки весны относительно местного астрономического меридиана в момент наблюдений. Гринвичское звездное время в этот момент равно

$$S = s - \lambda, \tag{I.1}$$

а всемирное

$$UT = (S - S_0) - (S - S_0)\,\nu, \tag{I.2}$$

где S_0 — звездное время в Гринвичскую полночь, а $\nu = 1/366{,}2422$ — коэффициент перехода от звездного времени к среднему. Таким образом, всемирное время, в сущности, тоже определяется из наблюдений звезд. Это время, отнесенное к положению мгновенного полюса и мгновенного экватора, а значит, и к мгновенному положению точки весны, обозначается UTO. Всемирное время в системе UTO является неравномерным из-за неравномерностей суточного вращения Земли. Эти неравномерности обусловлены движением земных полюсов, сезонными изменениями угловой скорости вращения Земли под действием геофизических и метеорологических факторов, вековым замедлением вращения Земли из-за приливного трения в системе Земля — Луна, непериодическими изменениями угловой скорости вращения Земли, обусловленными, вероятнее всего, солнечной активностью.

Данные станций наблюдений Международной службы движения полюсов позволяют определить поправку $\Delta\lambda$ к системе *UTO*, учитывающую движение мгновенного полюса относительно среднего. При помощи этой поправки образуется система *UT1*:

$$UT1 = UT0 + \Delta\lambda. \tag{I.3}$$

Службы времени дают поправки ΔUT за сезонные вариации угловой скорости вращения Земли. При помощи этих поправок образуется система квазиравномерного всемирного времени *UT2*

$$UT2 = UT1 + \Delta UT = UT0 + \Delta\lambda + \Delta UT. \tag{I.4}$$

Международное бюро времени регулярно публикует поправки $\Delta\lambda$ и ΔUT для редукции моментов подачи радиосигналов времени к системе *UT2* в изданиях «Circulaires du Bureau de l'Heure» и «Bulletin Horaire».

На промежутках времени до одного года во многих приложениях достаточно пользоваться системой *UT2*. На промежутках времени, бо́льших года, целесообразно пользоваться системой эфемеридного времени *ET*. Эфемеридное время — это равномерно текущее (теоретическое) время небесной механики, т. е. независимая переменная t, входящая в дифференциальные уравнения движения (гл. II). Переход от всемирного к эфемеридному времени осуществляется по формуле

$$ET = UT + \Delta T, \tag{I.5}$$

где поправка ΔT определяется из наблюдений Луны путем сравнения ее наблюденной долготы с эфемеридной, вычисленной согласно гравитационной теории движения Луны Брауна. Сейчас применяют три вида эфемерид Луны, которым придают соответствующий индекс $j = 0, 1, 2$; $i = 0$ — так называемая улучшенная эфемерида Луны; $j = 1$ — та же эфемерида на основе новой системы астрономических постоянных с исправленной ошибкой в одном из членов рядов Брауна; $j = 2$ — предыдущая эфемерида с уточненными Эккертом солнечными возмущениями, используется с 1972 г. в национальных астрономических ежегодниках. Соответственно различают три системы эфемеридного времени:

$$ET0 = UT2 + \Delta T0; \quad ET1 = UT2 + \Delta T1; \quad ET2 = UT2 + \Delta T2.$$

Точность определения поправок ΔT из наблюдений Луны пока невелика — ошибка несколько меньше одной секунды времени. Предварительные значения поправки ΔT публикуются в астрономических ежегодниках. В 1974 г. $\Delta T \approx +44^s$. Приближенное значение ΔT можно вычислить по формуле:

$$\Delta T^s = 1{,}82144\{8{,}72'' + 26{,}74''T + 11{,}22''T^2 + \\ + 10{,}71''\sin(140{,}0^\circ T + 240{,}7^\circ)\}, \tag{I.6}$$

где T — время, отсчитываемое в юлианских столетиях (см. ниже) по 36525 эфемеридных суток от эпохи 1900 г., январь 0,5 ET.

В настоящее время во многих странах осуществлен переход на систему атомного времени AT, которая основана на применении высокостабильных атомных и молекулярных эталонов частоты. Принято, что одна атомная секунда есть промежуток времени, в течение которого происходит 9 192 631 770 колебаний атомов цезия. Одна атомная секунда соответствует одной эфемеридной секунде с ошибкой $\pm 2 \cdot 10^{-9}$ — с точностью единицы времени, определяемой по орбитальному движению Земли. Стабильность атомных эталонов такова, что точность определения одной атомной секунды составляет 10^{-11}.

Для образования системы атомного времени с Международным бюро времени связано 10 атомных часов в США, Канаде, Японии, ЮАР, Франции, Англии и Швеции.

В настоящее время применяется новая шкала атомного времени А3, которая введена с 1 января 1966 г. и вычисляется как средневзвешенная шкала показаний всех атомных часов, связанных с Международным бюро времени.

В СССР принята шкала атомного времени TA-1, основанная на двух кварцевых часах, которые регулируются цезиевым эталоном частоты. Было принято, что в момент 1964 г. 1 января 12^h $UT2$

$$UT2 = TA - 1. \tag{I.7}$$

Разности $AT1—UT2$ публикуются в бюллетене «Эталонное время». Применяется также шкала UTC — шкала всемирного согласованного или координированного времени. Ее используют для согласования между собой шкал атомного и всемирного времени AT и $UT2$.

Для непрерывного счета времени на существенно больших промежутках применяется предложенная еще в XVI в. так называемая юлианская система (юлианский период). Необходимость использования этой системы обусловлена тем, что при подсчете, например, хотя бы числа дней на интервале в несколько столетий применение обычного календаря затруднительно. Начало юлианской системы (или юлианского периода) приходится на средний гринвичский полдень 1 января 4713 г. до нашей эры, после чего ведется непрерывный счет суток. Юлианский год содержит 365,25 эфемеридных суток. Для удобства пользования юлианской системой в Астрономическом ежегоднике СССР дается таблица «Юлианский период», при помощи которой легко определить, какому юлианскому дню (или моменту) соответствует заданная дата (или момент). Обозначение: *JD*. В соответствии с перечисленными выше системами измерения времени различают юлианскую дату *JD* в системе *UT* и юлианскую дату *JED* в системе *ET*, разница между которыми равна ΔT. Система записи: 1900 г., 12^h *ET*, 0 января$=$ $=$*JED* 2 415 020,0.

§ 3. Преобразования систем координат

Основная задача: преобразовать исходные координаты пунктов и наблюденные координаты ИСЗ в одну и ту же систему, инерциальную или гринвичскую.

Сначала рассмотрим преобразование исходных геодезических координат станций наблюдений B, L, H в гринвичские прямоугольные координаты $X_{P_{t_0}}$, $Y_{P_{t_0}}$, $Z_{P_{t_0}}$, связанные с референц-эллипсоидом. Для этого применяются формулы сфероидической геодезии

$$X_{P_{t_0}} = (N + H)\cos B \cos L; \quad Y_{P_{t_0}} = (N + H)\cos B \sin L;$$

$$Z_{P_{t_0}} = \left(\frac{b^2}{a^2} N + H\right)\sin B, \tag{I.8}$$

где a — большая полуось референц-эллипсоида, $b = a\sqrt{1-e^2}$ — его малая полуось, N — радиус кривизны первого вертикала, вычисляемый по формуле

$$N = a^2 (a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{-\frac{1}{2}}; \tag{I.9}$$

e — эксцентриситет меридианного эллипса.

Обратный переход производится методом последовательных приближений. Сначала из первых двух формул (1.8) находим

$$\operatorname{tg} L = \frac{Y_{P_{t_0}}}{X_{P_{t_0}}}. \tag{I.10}$$

Разделив третью формулу (I.8) на корень квадратный из суммы квадратов двух первых формул, получим:

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z_{P_{t_0}}}{\sqrt{X^2_{P_{t_0}} + Y^2_{P_{t_0}}}} + \frac{e^2 N}{N + H}. \tag{I.11}$$

В первом приближении второй член в (I.11) отбрасываем и находим первое приближение $B^{(1)}$. С этим значением находим первое приближение $H^{(1)}$ по формуле

$$H^{(1)} = \frac{\sqrt{X^2_{P_{t_0}} + Y^2_{P_{t_0}}}}{\cos B^{(1)}} - N. \tag{I.12}$$

Зная $H^{(1)}$, по формуле (I.11) находим второе приближение $B^{(2)}$; далее по формуле (I.12) — второе приближение $H^{(2)}$ со значением $B^{(2)}$ и т. д. Процесс приближения заканчиваем, когда разница между последним и предпоследним приближениями становится меньше заданной величины. Если заданная погрешность имеет порядок 0,01″, то достаточно трех-четырех приближений. Затем можно совершить переход к гринвичским координатам X_{t_0}, Y_{t_0}, Z_{t_0} для стандартной эпохи в системе общего земного эллипсоида. Для этого нужно сделать параллельный перенос системы $X_{P_{t_0}}$, $Y_{P_{t_0}}$, $Z_{P_{t_0}}$ из центра референц-эллипсоида O в центр общего земного эллипсоида O. Если ΔX, ΔY, ΔZ — координаты точки O в системе $X_{P_{t_0}}$, $Y_{P_{t_0}}$, $Z_{P_{t_0}}$, то указанное преобразование имеет вид

$$X_{t_0} = X_{P_{t_0}} - \Delta X; \quad Y_{t_0} = Y_{P_{t_0}} - \Delta Y; \quad Z_{t_0} = Z_{P_{t_0}} - \Delta Z. \tag{I.13}$$

Это преобразование нестрогое, так как здесь не учитывается разница в размерах и форме общего земного эллипсоида и референц-эллипсоида.

Строгое преобразование заключается в следующем.

Сначала по известным из сфероидической геодезии дифференциальным формулам II рода находим поправки ΔB, ΔL, ΔH к геодезическим координатам:

$$\begin{gathered}(M + H)\,\Delta B = \frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B \cdot \Delta a + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{1 - e^2} + N\right) \sin B \cos B \times \\ \times \Delta e^2 - (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \sin B + \Delta Z \cos B; \\ (N + H) \cos B \cdot \Delta L = - \Delta X \sin L + \Delta Y \cos L; \\ \Delta H = \frac{a}{N}\,\Delta a - N \sin^2 B\,\frac{\Delta e^2}{2} + (\Delta X \cos L + \Delta Y \sin L) \cos B + \Delta Z \sin B,\end{gathered} \tag{I.14}$$

где

$$\Delta e^2 = 2(1 - \alpha)\,\Delta\alpha;$$

$M = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}$ — радиус кривизны меридианного сечения, e — его эксцентриситет, α — полярное сжатие, $\Delta\alpha$, Δa —

малые разности в сжатии и большой полуоси между общим земным и референц-эллипсоидом:

	a км	α
Референц-эллипсоид СССР	6378,245	1:298,3
Общий земной эллипсоид (1967 г.)	6378,165	1:298,25

Далее исправляем найденными поправками исходные геодезические координаты

$$B_0 = B + \Delta B;\quad L_0 = L + \Delta L;\quad H_0 = H + \Delta H \qquad (I.15)$$

и, наконец, по формулам (I.8) и (I.13) со значениями B_0, L_0, H_0 вычисляем гринвичские координаты в системе общего земного эллипсоида X_{t_0}, Y_{t_0}, Z_{t_0}. Разница между строгим и нестрогим преобразованиями мала. Какой системой эллипсоида пользоваться и какое из преобразований применять, обычно решается исходя из конкретной практической задачи. Поэтому для простоты гринвичские прямоугольные координаты пунктов обозначим через X, Y, Z.

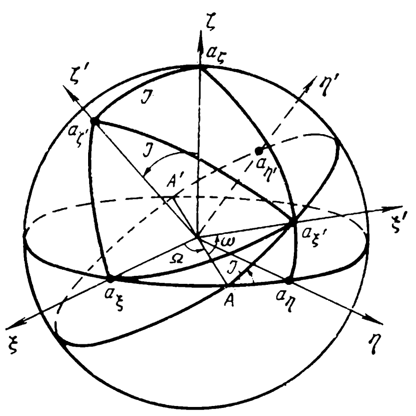

Рис. 4. Эйлеровы углы

Нужно также заметить, что если известны лишь астрономические координаты пункта (широта и долгота), определяемые направлением нормали к геоиду, то, строго говоря, их использовать нельзя. Их можно рассматривать лишь как приближенные геодезические координаты, к которым следует искать поправки из решения задачи космической геодезии. Учитывая введением этих поправок влияние уклонения отвеса, переходят от астрономических координат к геодезическим.

Все дальнейшие преобразования заключаются в параллельных переносах и поворотах координатных осей. Напомним сначала общее правило поворота системы координат. Пусть требуется перейти от некоторой системы координат ξ, η, ζ к системе ξ', η', ζ' (рис. 4). Основой преобразования служат эйлеровы углы:

угол прецессии Ω — угол между осью ξ и линией пересечения AA' плоскостей $\xi\eta$ и $\xi'\eta'$;

угол нутации I — угол между плоскостями $\xi\eta$ и $\xi'\eta'$ или, что то же самое, между направлениями осей ζ и ζ';

угол чистого вращения ω — угол в плоскости $\xi'\eta'$ между AA' и направлением оси ξ'.

Эйлеровы углы позволяют вычислить косинусы углов между осями «старой» системы $\xi\eta\zeta$ и осями «новой» системы $\xi'\eta'\zeta'$ — так называемые *направляющие косинусы*. Например, направляющий косинус оси ξ' относительно оси ξ найдется по теореме косинусов из сферического треугольника $a_\xi a_{\xi'} A$ (см. рис. 4).

$$\cos \widetilde{a_\xi a_{\xi'}} = l_1 = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos I. \tag{I.16}$$

Направляющий косинус оси ξ' относительно оси η — из треугольника $Aa_{\xi'}a_\eta$:

$$\cos \widetilde{a_{\xi'} a_\eta} = m_1 = \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos I. \tag{I.17}$$

Направляющий косинус ξ' относительно ζ — из треугольника $Aa_{\xi'}a_\zeta$:

$$\cos \widetilde{a_{\xi'} a_\zeta} = n_1 = \sin\omega\sin I. \tag{I.18}$$

Аналогичным образом находят направляющие косинусы l_2, m_2, n_2 оси η' относительно осей ξ, η, ζ и направляющие косинусы осей l_3, m_3, n_3 оси ζ относительно осей ξ, η, ζ соответственно.

$$\left.\begin{aligned} l_2 &= -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos I,\\ m_2 &= -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos I,\\ n_2 &= \cos\omega\sin I; \end{aligned}\right\}, \tag{I.19}$$

$$\left.\begin{aligned} l_3 &= \sin\Omega\sin I,\\ m_3 &= -\cos\Omega\sin I,\\ n_3 &= \cos I; \end{aligned}\right\}, \tag{I.20}$$

Как известно из аналитической геометрии, прямое и обратное преобразования можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= l_1\xi + m_1\eta + n_1\zeta\\ \eta' &= l_2\xi + m_2\eta + n_2\zeta\\ \zeta' &= l_3\xi + m_3\eta + n_3\zeta \end{aligned}\right\}, \tag{I.21}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= l_1\xi' + l_2\eta' + l_3\zeta'\\ \eta &= m_1\xi' + m_2\eta' + m_3\zeta'\\ \zeta &= n_1\xi' + n_2\eta' + n_3\zeta' \end{aligned}\right\} \tag{I.22}$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}; \tag{I.23}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix}. \tag{I.24}$$

В формулах (I.23) и (I.24) матрицы, элементами которых служат направляющие косинусы, иногда называют *матрицами поворота* или *матрицами вращения.*

Переход от гринвичской системы координат XYZ к инерциальной xyz и обратно

Обращаясь к рисункам 1 и 4 и полагая $\xi'=X$, $\eta'=Y$, $\zeta'=Z$; $\xi=x$, $\eta=y$, $\zeta=z$, видим, что ввиду совпадения осей аппликат угол $I=0$ и искомое преобразование заключается в повороте гринвичской системы на угол $\bar{S}=\Omega+\omega$, равный среднему гринвичскому звездному времени, отнесенному к стандартной эпохе t_0. Подставляя в формулы (I.16), (I.17) и (I.18) $I=0$ с учетом $\bar{S}=\Omega+\omega$, найдем направляющие косинусы:

$$\left.\begin{array}{lll} l_1=\cos\bar{S}, & m_1=\sin\bar{S}, & n_1=0 \\ l_2=-\sin\bar{S}, & m_2=\cos\bar{S}, & n_2=0 \\ l_3=0, & m_3=0, & n_3=1 \end{array}\right\}. \qquad (I.25)$$

С этими значениями формулы (I.22—I.24) дают преобразование гринвичской системы в инерциальную, а формулы (I.21, I.23) — инерциальной в гринвичскую, причем формулы одни и те же для координат пунктов и координат ИСЗ. Время $\bar{S}$ для заданного момента в системе UT вычисляется по формуле сферической астрономии

$$\bar{S}=S_{ot_0}+UT2+(UT2)^h\cdot\mu, \qquad (I.26)$$

где $\mu=9{,}856\ s/h$ — ускорение звездного времени относительно среднего солнечного, а S_{ot_0} — среднее звездное время в гринвичскую полночь заданной даты, отсчитываемое от точки весны 1950,0 и вычисляемое по формуле:

$$S_{ot_0}=6^h40^m+8\,639\,877{,}302^sT_1-0{,}0002^sT_1^2, \qquad (I.27)$$

где T_1 — промежуток времени между заданной датой и эпохой t_0 в юлианских столетиях. Если будет достигнута точность фиксации моментов наблюдений ИСЗ порядка 0,0001″ и выше, то из величины S_{ot_0} следует вычесть поправку за часовую прецессию по прямому восхождению, ибо за интервал времени, равный $(UT2)^h$ точка весеннего равноденствия успеет сместиться (смещение за час составляет $P_\alpha^h=0{,}00014^s$). Эта поправка равна $P_\alpha^s\cdot(UT2)^h$.

Переход от равноденственных координат $x_{\text{ист}}$, $y_{\text{ист}}$, $z_{\text{ист}}$ к инерциальным xyz и обратно

Так как координаты $x_{\text{ист}}$, $y_{\text{ист}}$, $z_{\text{ист}}$ отнесены к заданному моменту некоторой даты (обычно это момент и дата наблюдений), а инерциальные — x, y, z — к стандартной эпохе t_0, то для нахождения искомого перехода следует учесть прецессию и нутацию за указанный промежуток времени.

Положим

$$\xi = x,\ \eta = y,\ \zeta = z;\ \xi' = x_{\text{ист}},\ \eta' = y_{\text{ист}},\ \zeta' = z_{\text{ист}}.$$

Теория редукционных вычислений в сферической астрономии приводит к следующим формулам для направляющих косинусов, входящих в (I.16) — (I.20) [53]:

$$\left.\begin{aligned}
l_1 &= X_x - X_y\Delta\psi_s\cos\varepsilon - X_z\Delta\psi_s\sin\varepsilon\\
m_1 &= Y_x - Y_y\Delta\psi_s\cos\varepsilon - Y_z\Delta\psi_s\sin\varepsilon\\
n_1 &= Z_x - Z_y\Delta\psi_s\cos\varepsilon - Z_z\Delta\psi_s\sin\varepsilon\\
l_2 &= X_x\Delta\psi_s\cos\varepsilon + X_y - X_z\Delta\varepsilon_s\\
m_2 &= Y_x\Delta\psi_s\cos\varepsilon + Y_y - Y_z\Delta\varepsilon_s\\
n_2 &= Z_x\Delta\psi_s\cos\varepsilon + Z_y - Z_z\Delta\varepsilon_s\\
l_3 &= X_x\Delta\psi_s\sin\varepsilon + X_y\Delta\varepsilon_s + X_z\\
m_3 &= Y_x\Delta\psi_s\sin\varepsilon + Y_y\Delta\varepsilon_s + Y_z\\
n_3 &= Z_x\Delta\psi_s\sin\varepsilon + Z_y\Delta\varepsilon_s + Z_z
\end{aligned}\right\}. \qquad (I.28)$$

С этими значениями формулы (I.21), (I.23) дают обратное преобразование, формулы (I.22), (I.24) — прямое.

В формулах (I.28) имеем:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= \cos\zeta_0\cos z\cos\theta - \sin\zeta_0\sin z\\
Y_x &= -\sin\zeta_0\cos z\cos\theta - \cos\zeta_0\sin z\\
Z_x &= -\cos z\sin\theta\\
X_y &= \cos\zeta_0\sin z\cos\theta + \sin\zeta_0\cos z\\
Y_y &= -\sin\zeta_0\sin z\cos\theta + \cos\zeta_0\cos z\\
Z_y &= -\sin z\sin\theta\\
X_z &= \cos\zeta_0\sin\theta;\quad Y_z = -\sin\zeta_0\sin\theta;\quad Z_z = \cos\theta
\end{aligned}\right\}, \qquad (I.29)$$

где ζ_0, z, θ — прецессионные параметры Ньюкома:

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_0 &= (2304{,}253'' + 1{,}3973''T_1 + 0{,}00006''T_1^2)\tau +\\
&\quad + (0{,}3023'' + 0{,}0027''T_1)\tau^2 + 0{,}01800''\tau^3\\
z &= (2304{,}253'' + 1{,}3973''T_1 + 0{,}00006''T_1^2)\tau +\\
&\quad + (1{,}0950'' + 0{,}0039''T_1)\tau^2 + 0{,}01832''\tau^3\\
\theta &= (2004{,}685'' - 0{,}8533''T_1 - 0{,}00037''T_1^2)\tau -\\
&\quad - (0{,}4267'' + 0{,}00037''T_1)\tau^2 - 0{,}04180''\tau^3
\end{aligned}\right\}, \qquad (I.30)$$

T_1 — промежуток времени между эпохами t_0 и 1900,0 в тропических столетиях по 36524,22 эфемеридных суток, а τ — промежуток времени между заданным моментом заданной даты и эпохой t_0 в тех же единицах. Далее: $\Delta\psi_s = \Delta\psi + d\psi$ — нутация в долготе, $\Delta\varepsilon_s = \Delta\varepsilon + d\varepsilon$ — нутация в наклоне, ε — истинный наклон эклиптики к экватору; $d\psi$, $d\varepsilon$ — короткопериодические члены нутации, $\Delta\psi$, $\Delta\varepsilon$ — долгопериодические. Эти величины могут быть выбраны из «Астрономического ежегодника СССР». Если нутацию не учитывать, положив ее равной нулю, то направляющие косинусы (I.28) образуют матрицу прецессии. В рассмотренном преобразовании не учтены колебания полюса, определяемые Международной службой движения полюсов. Поэтому найденные описанным способом координаты x, y, z следует еще исправить поправками за колебания полюса. Амплитуда колебаний мгновенного полюса не превышает 10—15 м. Координаты мгновенного полюса в левой гринвичской системе на плоскости, касательной к среднему полюсу стандартной эпохи, публикуются в бюллетене «Эталонное время». Рассмотрим рис. 5, на котором $x_{\text{пол}}$, $y_{\text{пол}}$ — публикуемые координаты мгновенного полюса, выражаемые либо в угловой мере, либо в радианной; θ, ρ — полярные координаты мгновенного полюса, причем:

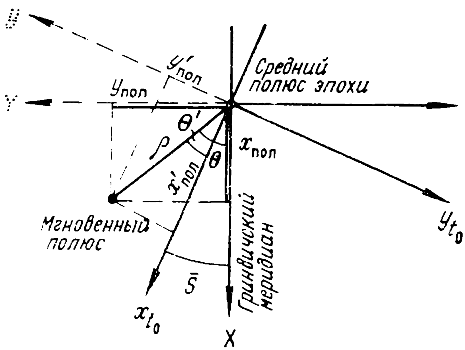

Рис. 5. Взаимное расположение мгновенного полюса и среднего полюса эпохи

$$x_{\text{пол}} = \rho\cos\theta, \quad y_{\text{пол}} = \rho\sin\theta;$$

θ', ρ — полярные координаты мгновенного полюса в инерциальной системе, причем $\theta' = \theta - \bar{S}$. Полагая теперь на рис. 4 точку a_ζ средним полюсом, точку $a_{\zeta'}$ — мгновенным полюсом, а угол чистого вращения ω — равным нулю, найдем:

$$\Omega = 90^\circ - (\theta - \bar{S}),$$

$I = \rho$ (величина малая). По формулам (I.16)—(I.20) получим выражения для направляющих косинусов:

$$\left.\begin{array}{lll} l_1 = \sin(\theta - \bar{S}), & l_2 = -\cos(\theta - \bar{S}), & l_3 = \rho\cos(\theta - \bar{S}) \\ m_1 = \cos(\theta - \bar{S}), & m_2 = \sin(\theta - \bar{S}), & m_3 = -\rho\sin(\theta - \bar{S}) \\ n_1 = 0; & n_2 = \rho; & n_3 = 1 \end{array}\right\}. \quad (I.31)$$

Подставляя их в формулу (I.24), в которой теперь ξ', η', ζ' следует заменить на x, y, z, найденные в предыдущем преобразовании, получим инерциальные координаты $x_{t_0} \equiv \xi$; $y_{t_0} \equiv \eta$; $z_{t_0} \equiv \zeta$, освобожденные от влияния колебаний полюса.

Связь между прямоугольными и сферическими координатами α, δ

Из треугольников OCC'', $OC''C_x''$ и $OC''C_y''$ на рис. 2 для геоцентрических координат получаем

$$x = r\cos\delta\cos\alpha,\ \ y = r\cos\delta\sin\alpha,\ \ z = r\sin\delta \tag{I.32}$$

или

$$x = r\cos\varphi\cos(\lambda + \bar{S}),\ \ y = r\cos\varphi\sin(\lambda + \bar{S}),\ \ z = r\sin\varphi,$$

где φ, λ — геоцентрические широта и долгота ИСЗ.

То же для топоцентрических координат:

$$x' = r'\cos\delta'\cos\alpha';\quad y' = r'\cos\delta'\sin\alpha';\quad z' = r'\sin\delta'. \tag{I.32,a}$$

Обратное преобразование:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};\quad \operatorname{tg}\delta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}};\quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \tag{I.33}$$

топоцентрические координаты:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{y'}{x'};\quad \operatorname{tg}\delta' = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}};\quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{I.33,a}$$

Если система координат гринвичская, то x, y, z нужно заменить на X, Y, Z, а α или α' — на $\alpha - S$ или $\alpha' - S$, где S — гринвичское звездное время.

Связь между геоцентрическими и топоцентрическими прямоугольными координатами

$$x = x' + x_{п},\ \ y = y' + y_{п},\ \ z = z' + z_{п} \tag{I.34}$$

— в равноденственной системе.

В гринвичской системе:

$$X = X' + X_{п},\ Y = Y' + Y_{п},\ Z = Z' + Z_{п}, \tag{I.34,a}$$

где $x_{п}$, $y_{п}$, $z_{п}$ и $X_{п}$, $Y_{п}$, $Z_{п}$ — координаты пункта ($z \equiv Z$, $z_{п} \equiv Z_{п}$) в соответствующей системе координат. Формулы (I.32), (I.32,*a*) и (I.34) позволяют найти аналогичную связь между сферическими топоцентрическими и геоцентрическими координатами.

Глава II

ЭЛЕМЕНТЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ И ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

§ 1. Постановка задачи

Основным фактором, определяющим движение ИСЗ, является внешнее гравитационное поле Земли (геопотенциал). Кроме того, на движение спутников действуют следующие факторы: притяжение Луны и Солнца, атмосферное торможение, давление света. Существует также ряд второстепенных факторов, влияющих на движение спутника, как, например, действие магнитного поля Земли, влияние приливов, релятивистские эффекты. Эти факторы из-за малости их влияния обычно не рассматривают, но вследствие постепенного повышения точности наблюдений ИСЗ их следует иметь в виду. Сейчас приливное действие, например, уже частично начинают учитывать.

Если бы Земля была строго сферической с равномерным распределением плотности, то ее гравитационный потенциал совпадал бы с потенциалом материальной точки, масса которой равна массе Земли. Тогда при отсутствии остальных перечисленных выше факторов ИСЗ двигался бы строго по законам Кеплера:

1) орбитой спутника был бы эллипс, в фокусе которого находился бы центр масс Земли;

2) так называемая секториальная скорость спутника была бы постоянной, т. е. радиус-вектор спутника описывал бы в равные времена равные площади;

3) отношение квадрата периода обращения спутника к кубу большой полуоси его орбиты было бы величиной постоянной. Такое движение называется *невозмущенным*.

В действительности движение ИСЗ в поле тяготения реальной Земли и под действием указанных выше факторов не подчиняется законам Кеплера. Это движение называется *возмущенным*. Отличия реальной, возмущенной орбиты ИСЗ от эллиптической невозмущенной называют возмущениями.

При получении геодезической информации из результатов наблюдений ИСЗ всегда в той или иной форме необходим решать следующую основную задачу небесной механики. Пусть в некоторый начальный момент времени в заданной системе координат известны (например из наблюдений) координаты спутника и компоненты его скорости; требуется найти его координаты и компоненты скорости в любой другой момент времени.

Для этого нужно составить дифференциальные уравнения движения ИСЗ под действием всех перечисленных факторов и проинтегрировать их. Результатом интегрирования являются формулы для координат и скоростей ИСЗ в виде функций времени и постоянных интегрирования. В общем виде такая задача строгого решения не имеет. Обычно поступают несколько иначе, используя то обстоятельство, что на ограниченных интервалах времени возмущения достаточно малы.

Сначала интегрируют дифференциальные уравнения невозмущенного движения. Эта задача имеет строгое решение. Ее изучение является предметом *теории невозмущенного движения* (задача двух тел). Затем, применяя метод вариации произвольных постоянных, составляют дифференциальные уравнения, определяющие возмущения от каждого из перечисленных факторов. Интегрируя эти уравнения приближенными методами, получают формулы для учета возмущений в движении ИСЗ с той или иной степенью точности. Такая задача является предметом теории возмущенного движения, или теории возмущений. Задача учета возмущений является наиболее важной и вместе с тем наиболее сложной.

Кроме того, формулы для возмущений в движении ИСЗ под действием возмущающей части геопотенциала являются основным аналитическим аппаратом космической геодезии: как увидим в гл. VI, эти формулы являются исходными при изучении внешнего гравитационного поля Земли методами космической геодезии.

В данной главе сначала рассмотрим основы теории невозмущенного движения ИСЗ, а затем основы теории возмущений. Все сказанное будет справедливым не только для ИСЗ, но и для спутников (естественных или искусственных) других планет Солнечной системы.

§ 2. Дифференциальные уравнения невозмущенного движения ИСЗ

Во всех случаях спутник будем считать материальной точкой с массой m. При изучении невозмущенного движения ИСЗ Землю также примем за материальную точку (либо однородную сферу) с массой M. Так как $m \ll M$, то можно считать, что спутник Землю практически не притягивает; говорят, что спутник имеет «нулевую» массу. Систему координат выберем так:

начало — в центре масс Земли, ось x направим в точку весеннего равноденствия ♈ некоторой эпохи (например 1950,0 г.), ось z — по средней оси вращения Земли, отнесенной к той же эпохе, ось y направим в плоскости среднего экватора к востоку, чтобы система координат была правой (рис. 6). Эту систему координат в первой главе назвали *инерциальной*.

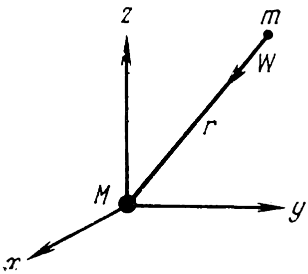

Рис. 6. Взаимное расположение материальных точек в задаче двух тел в инерциальной системе координат

Элементарный вывод уравнений движения

Пренебрегая действием спутника на Землю, рассмотрим ускорение w, задаваемое Землей спутнику вследствие закона тяготения. По второму закону Ньютона будем иметь:

$$mw = F, \tag{II.1}$$

где сила F в соответствии с законом тяготения равна

$$F = -f\frac{mM}{r^2}, \tag{II.2}$$

причем f — постоянная тяготения, r — геоцентрический радиус-вектор спутника. Приравнивая (II.1) и (II.2), получим:

$$w = -\frac{fM}{r^2}. \tag{II.3}$$

Обозначим ускорения ИСЗ вдоль осей x, y, и z соответственно через $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ (здесь и дальше точки сверху означают производные по времени t: $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$ и т. д.).

Чтобы найти эти величины, нужно правую часть (II.3) последовательно умножить на направляющие косинусы радиуса-вектора r относительно осей x, y, z. Эти направляющие косинусы соответственно равны $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$. Таким образом, получим искомые дифференциальные уравнения невозмущенного движения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \mu\frac{x}{r^3} &= 0 \\ \ddot{y} + \mu\frac{y}{r^3} &= 0 \\ \ddot{z} + \mu\frac{z}{r^3} &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{II.4}$$

где $\mu = fM$ — гравитационный параметр.

Общий метод вывода уравнений движения

Напомним сначала необходимые сведения из аналитической механики.

1. Пусть дана некоторая совокупность независимых величин q, однозначно определяющих положение механической системы в пространстве. В этом случае величины q называют *обобщенными координатами.*

2. Величины $\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$ называют *обобщенными скоростями.*

3. Разность между кинетической T и потенциальной U энергиями механической системы называют *функцией Лагранжа* L или *лагранжианом системы.* В случае сил притяжения потенциальной энергии приписывается знак минус и функция Лагранжа записывается так:

$$L = T + U. \tag{II.5}$$

4. Производную

$$\frac{\partial L}{\partial q} = F \tag{II.6}$$

называют *обобщенной силой*, а производную

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = P \tag{II.7}$$

— *обобщенным импульсом.*

5. Интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt \tag{II.8}$$

называется *действием.*

6. Движение любой механической системы, характеризуемой некоторым лагранжианом $L = L(q, \dot{q}, t)$, между положением с координатами q_1 в момент t_1 и положением с координатами q_2 в момент t_2 происходит так, что

$$S \to \min \tag{II.9}$$

(вообще говоря, действие принимает экстремальное значение). Это так называемый *принцип наименьшего действия* (или *принцип Гамильтона*).

7. Выражение для действия (II.8) представляет собой функционал. Как известно из вариационного исчисления, необходимым условием для достижения функционалом экстремального значения является равенство нулю его первой вариации δS:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0, \qquad \text{(II.10)}$$

где δq и $\delta \dot{q}$ — вариации координат и скоростей, причем $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Интегрируя второй член по частям и замечая, что $\delta q(t)_{t_1<t<t_2} \neq 0$, $dt \neq 0$, получаем так называемые *уравнения Лагранжа II рода:*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \qquad \text{(II.11)}$$

Это общая форма дифференциальных уравнений движения.

Таким образом, после выбора системы координат задача составления уравнений движения сводится к составлению лагранжиана, исходя из физической сущности задачи, и подстановки его в (II.11).

Рассмотрим теперь механическую систему Земля — спутник при сделанных выше предположениях.

Пусть $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, тогда $\dot{q}_1 = \dot{x}$, $\dot{q}_2 = \dot{y}$, $\dot{q}_3 = \dot{z}$. Кинетическая энергия ИСЗ равна

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \qquad \text{(II.12)}$$

потенциальная энергия системы

$$U = f \frac{mM}{r}. \qquad \text{(II.13)}$$

Составляя лагранжиан (II.5) и вычисляя производные, входящие в (II.11), найдем, например, для первого уравнения

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) = fmM \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} = -fM \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -fmM \frac{x}{r^3},$$

ибо

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Аналогично поступаем и для двух других уравнений. Окончательно получим систему дифференциальных уравнений движения, тождественную (II.4):

$$\ddot{x} = -fM \frac{x}{r^3}; \quad \ddot{y} = -fM \frac{y}{r^3}; \quad \ddot{z} = -fM \frac{z}{r^3}.$$

§ 3. Интегрирование дифференциальных уравнений невозмущенного движения

Интегрирование системы трех уравнений второго порядка (II.4) должно нам дать шесть интегралов и шесть произвольных постоянных:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3) \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3) \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3) \\ x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4 C_5, C_6) \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.14)}$$

где t — время, C_1, ..., C_6 — произвольные постоянные интегрирования, определяемые по *начальным условиям движения,* т. е. по значениям $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, x_0, y_0, z_0, заданным в некоторый начальный момент t_0.

Интегрирование уравнений (II.4) ведется методом разделения переменных, для чего уравнения предварительно преобразуются. В результате получим: три интеграла площадей, интеграл энергии, интеграл орбиты и динамический интеграл. Перечисленные интегралы затем преобразуем к форме (II.14).

Интегралы площадей

Умножим первое из уравнений (II.4) на $-y$, второе на $+x$ и сложим; затем умножим первое уравнение на $+z$, третье на $-x$ и, наконец, умножим второе уравнение на $-z$, третье на $+y$ и также сложим. Тем самым мы исключили из (II.4) вторые члены в левых частях. Поскольку очевидно, например, что

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = 0,$$

то преобразованная система немедленно интегрируется.

Интегрируя, получим так называемые интегралы площадей:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c_3, \quad \dot{x}z - x\dot{z} = c_2, \quad y\dot{z} - z\dot{y} = c_1, \qquad \text{(II.15)}$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования (постоянные площадей). Умножив первое из уравнений (II.15) на z, второе — на y и третье — на x и сложив, найдем, что

$$c_1x + c_2y + c_3z = 0. \qquad \text{(II.16)}$$

Это значит, что невозмущенная орбита ИСЗ лежит в плоскости, проходящей через центр масс Земли.

Так как невозмущенная орбита является плоской кривой, то введя в плоскости орбиты произвольную систему координат ξ, η с началом в центре масс Земли, уравнения движения (II.4) можно теперь записать так:

$$\ddot{\xi} + \mu \frac{\xi}{r^3} = 0; \quad \ddot{\eta} + \mu \frac{\eta}{r^3} = 0.$$

Тогда, вместо (II.15) получим один интеграл:

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = c. \tag{II.17}$$

Введя полярные координаты r и φ по формулам

$$\xi = r\cos\varphi; \quad \eta = r\sin\varphi \tag{II.18}$$

и выразив левую часть (II.17) через r и φ, будем иметь

$$r^2\dot{\varphi} = c. \tag{II.19}$$

В (II.19) слева стоит удвоенная секториальная скорость, т. е. удвоенная площадь, описываемая радиусом-вектором r в единицу времени. Таким образом, секториальная скорость есть величина постоянная. Тем самым строго доказан *второй закон Кеплера*. Поэтому интегралы (II.15) и называются *интегралами площадей*.

Интеграл энергии

Умножим первое из уравнений (II.4) на $2\dot{x}$, второе — на $2\dot{y}$, третье — на $2\dot{z}$ и сложим. Получим:

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z} = -\frac{2\mu}{r^3}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}). \tag{II.20}$$

Это эквивалентно выражению

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2\mu \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}. \tag{II.21}$$

Интегрируя, найдем:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = V^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \tag{II.22}$$

где V — орбитальная скорость спутника, h — новая произвольная постоянная, называемая *постоянной энергии*. Интеграл (II.22) представляет собой закон сохранения энергии в системе двух материальных точек (Земля — ИСЗ). Поэтому его называют *интегралом энергии*.

Интеграл орбиты

Этот интеграл определяет геометрию орбиты. Будем искать его в виде функции $r = r(\varphi)$.

Для квадрата скорости в полярных координатах имеем

$$V^2 = \xi^2 + \eta^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}^2 \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]. \qquad (II.23)$$

Заменяя $\dot{\varphi}$ его выражением при помощи (II.19), разрешая (II.23) относительно $d\varphi$ и интегрируя, находим

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c} \right) \cdot \left(\frac{\mu^2}{c^2} + h \right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (II.24)$$

где φ_0 — еще одна постоянная интегрирования — «начальная фаза». Разрешив последнюю формулу относительно r, получим

$$r = \frac{P}{1 + e\cos v}, \qquad (II.25)$$

где обозначено:

$$P = \frac{c^2}{\mu}; \qquad (II.26)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{c^2 h}{\mu^2}}; \qquad (II.27)$$

$$v = \varphi - \varphi_0. \qquad (II.28)$$

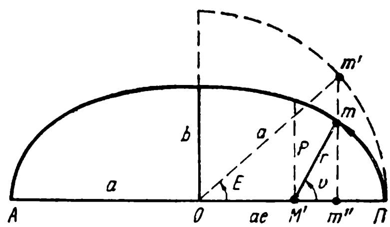

Рис. 7. Элементы движения по эллипсу

Выражение (II.25) есть фокальное уравнение конического сечения, т. е. орбита может быть *эллипсом, параболой* и *гиперболой.* Тем самым строго доказан в самом общем виде *первый закон Кеплера.* Тогда P — фокальный параметр орбиты, e — ее эксцентриситет, v — так называемая *истинная аномалия* (геометрическое значение — на рис. 7).

Для эллипса ($e < 1$) $P = a(1 - e^2)$,
для гиперболы ($e > 1$) $P = a(e^2 - 1)$; a — большая полуось орбиты. Дадим строгое доказательство третьего закона Кеплера для эллиптических орбит. Если $\sigma = \pi ab$ (b — малая полуось) — площадь эллипса, а T — период обращения по орбите, то удвоенная секториальная скорость равна:

$$2\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\pi ab}{T} = c. \qquad (II.29)$$

Так как $c = \sqrt{\mu}\sqrt{a(1 - e^2)}$, а $b = a\sqrt{1 - e^2}$, то из (II.29) найдем аналитическое выражение третьего закона Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}. \qquad (II.30)$$

Величину

$$n = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} \tag{II.31}$$

называют *средним движением* по эллиптической орбите.

Динамический интеграл

Этот интеграл ищется в виде $\varphi=\varphi(t)$ или, что то же $v=v(t)$. Предварительно укажем элементы движения по эллипсу.

На рис. 7 материальная точка M находится в фокусе эллиптической орбиты; m — движущаяся точка (стрелка указывает направление движения); П — перицентр орбиты, A — апоцентр орбиты, a, b — большая и малая полуоси, e — эксцентриситет орбиты, r — радиус-вектор точки m, P — фокальный параметр, угол v — введенная выше *истинная аномалия*, угол E — так называемая *эксцентрическая аномалия*. Связь между v и E устанавливается так. Из рис. 7 имеем:

$$r^2 = (\overline{Mm''})^2 + (\overline{mm''})^2; \quad \overline{mm''} = \overline{m'm''}\,\frac{b}{a};$$

$$\overline{m'm''} = a \sin E; \quad \overline{Mm''} = a \cos E - ae.$$

Отсюда

$$r = a(1 - e \cos E). \tag{II.32}$$

Приравняв это выражение интегралу орбиты (II.25), найдем

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}, \tag{II.33}$$

и одновременно, при помощи (II.33),

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin E}{1 - e\cos E}. \tag{II.34}$$

Чаще всего используется формула, получаемая из (II.33) и (II.34):

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{II.35}$$

Понадобится также выражение для постоянной энергии

$$h = -\frac{\mu}{a}, \tag{II.36}$$

получаемое из сравнения формул (II.26) и (II.27).

Перейдем к выводу последнего интеграла. Заменив в (II.19) на основании (II.28) φ на ϑ и интегрируя, найдем

$$\int\limits_0^v \frac{dv}{(1+e\cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t-\tau), \tag{II.37}$$

где τ — последняя (шестая) постоянная интегрирования. Так как истинные аномалии отсчитываются от направления на перицентр, то τ имеет смысл момента *прохождения через перицентр.* Интеграл (II.37) для эллипса ($e<1$), гиперболы ($e>1$) и параболы ($e=1$) имеет различные значения и достаточно сложный вид. Поэтому в разных случаях его вычисляют по-разному. В случае *эллиптических орбит* поступают так: возводят (II.19) в квадрат, исключают φ при помощи интеграла энергии, заменяют c, e и h их значениями (II.26), (II.27) и (II.36) и, разрешая полученную формулу относительно dt, находят

$$dt = \left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} - \frac{\mu a(1-e^2)}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr. \tag{II.38}$$

Интегрируя это выражение (интеграл табличный), получают:

$$t-\tau = \left[\arccos\frac{a-r}{ae} - e\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{ae}\right)^2}\right]\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}. \tag{II.39}$$

Из (II.32) следует, что

$$\frac{a-r}{ae} = \cos E.$$

Тогда (II.39) превращается в так называемое *уравнение Кеплера:*

$$E = M + e\sin E, \tag{II.40}$$

где

$$M^* = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t-\tau) \equiv n(t-\tau) \tag{II.41}$$

— *средняя аномалия.* Уравнение Кеплера решается методом последовательных приближений. Если задан момент t, а также τ и a, то найдя M, в нулевом приближении можно положить $E_0 = M$ и найти эксцентрическую аномалию в первом приближении так:

$$E_1 = M + e\sin M;$$

во втором приближении:

$$E_2 = M + e\sin E_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

* Не путать с обозначением массы M.

вообще:

$$E_{k+1} = M + e \sin E_k, \qquad (II.42)$$

где k — номер приближения.

Процесс приближений абсолютно сходится при всех значениях $e<1$. После нахождения эксцентрической аномалии E истинная аномалия v найдется по одной из формул (II.33), (II.34) или (II.35). Тем самым устанавливается искомая связь между v и t.

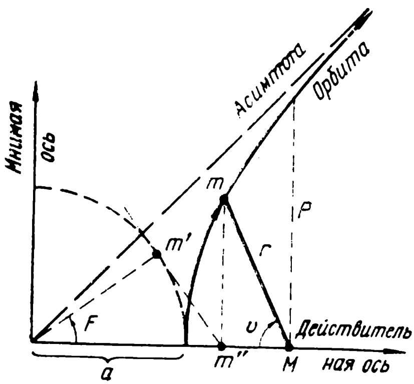

Рис. 8. Элементы движения по гиперболе

Укажем аналогичные формулы для гиперболической и параболической орбит, хотя в космической геодезии с ними приходится иметь дело гораздо реже, чем с эллиптическими орбитами.

Гиперболическая орбита (рис. 8). Все обозначения на рис. 8 аналогичны обозначениям на рис. 7. Угол F для гиперболы играет роль эксцентрической аномалии, так что

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \qquad (II.43)$$

Уравнение, аналогичное уравнению Кеплера, имеет вид

$$e \operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{F}{2} + 45^\circ\right) = \frac{\sqrt{\mu}}{|a|^{3/2}}(t-\tau), \qquad (II.43,a)$$

причем большая полуось здесь берется по абсолютной величине, так как у гиперболы $a<0$.

Параболическая орбита. Положив в (II.37) $e=1$ и интегрируя, получим

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2} = n(t-\tau), \qquad (II.44)$$

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{q^{3/2}\sqrt{2}}, \quad q = \frac{p}{2}, \qquad (II.45)$$

где q — так называемое *расстояние перицентра*.

Уравнение (II.44) имеет всего один вещественный корень, ибо в левой части всего одна перемена знаков (теорема Декарта).

В заключение этого параграфа следует сделать ряд важных замечаний. Так как у эллиптических орбит $a>0$, у гиперболических — $a<0$, а у параболических — $a \to \infty$, то из формулы (II.36) вытекает, что *постоянная энергии в эллиптическом движении отрицательна* ($h_{эл}<0$), *в гиперболическом — положительна* ($h_{гип}>0$) *и в параболическом равна нулю* ($h_{пар}=0$). Тогда из интеграла энергии следует, что орбитальная скорость V для эллиптических орбит может изменяться в пределах

$$\sqrt{\frac{\mu}{r}} \leqslant V_{эл} < \sqrt{\frac{2\mu}{r}}; \tag{II.46}$$

для гиперболических орбит орбитальная скорость удовлетворяет неравенству

$$V_{гип} > \sqrt{\frac{2\mu}{r}}. \tag{II.47}$$

Левый предел в (II.46) — так называемая «первая космическая скорость» — скорость движения ИСЗ по круговой орбите при заданном r (у поверхности Земли — $\approx 7{,}8$ км/сек), справа (в обеих формулах) — так называемая «вторая космическая скорость», равная у поверхности Земли $\approx 11{,}2$ км/сек — скорость движения по параболе, необходимая для того, чтобы космический аппарат покинул сферу притяжения Земли и стал спутником Солнца.

§ 4. Элементы орбиты и их связь с постоянными интегрирования

В результате интегрирования уравнений невозмущенного движения получим шесть постоянных интегрирования: постоянные площадей c_1, c_2, c_3, постоянную энергии h, начальную фазу φ_0 и момент прохождения через перицентр τ. Обычно вместо перечисленных постоянных интегрирования используют однозначно связанные с ними величины — так называемые *элементы орбиты*. Элементы орбиты определяют форму и размеры орбиты, ее ориентацию в пространстве и эпоху, к которой орбита отнесена. Форму орбиты определяет эксцентриситет e — формула (II.27), размеры — большая полуось a — формула (II.36). Эпоху определяет момент прохождения через перицентр τ. Начальная фаза определяется введением истинной аномалии (II.28). Элементы, определяющие ориентацию орбиты в пространстве, связаны с постоянными площадей. Этими элементами являются (рис. 9): 1) долгота восходящего узла Ω; 2) наклон орбиты i к опорной плоскости; 3) долгота перицентра от узла ω (или аргумент перицентра). За опорную плоскость в случае ИСЗ принимается средняя плоскость земного экватора, в случае гелиоцентрического движения — плоскость эклиптики. Точка пересечения орбиты с опорной плоскостью, когда материальная точка m переходит из южной полусферы в северную, называется восходящим узлом орбиты и обозначается тем же значком Ω, противоположная ей точка называется нисходящим узлом орбиты. Линия пересечения плоскости орбиты с опорной плоскостью называется линией узлов орбиты. За начальное направление принимается направление из точки M в точку весны Υ (см. рис. 9). Рис. 9 представляет собой геоцентрическую сферу радиуса c, на которую спроектирована орбита ИСЗ и указаны перечисленные элементы. С механической точки зрения второй закон Кеплера представляет собой закон сохранения момента импульса в системе Земля—спутник. Поскольку вектор момента импульса спутника $\vec{c}$ определяется как векторное произведение $\vec{c} = m\vec{V}x \times \vec{r}$, то вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости орбиты. С другой стороны, интегралы площадей (II.15) — не что иное как модули проекций вектора момента импульса на координатные оси. Тогда

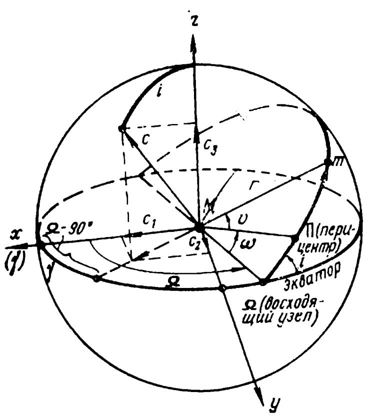

Рис. 9. Связь между элементами орбиты и постоянными площадей

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \tag{II.48}$$

и из рис. 9 находим:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= c \sin i \sin \Omega \\ c_2 &= -c \sin i \cos \Omega \\ c_3 &= c \cos i \end{aligned}\right\}. \tag{II.49}$$

При изучении эллиптического движения вместо τ чаще используется либо значение одной из аномалий в начальный момент t_0: M_0, E_0, v_0, либо, еще чаще, так называемая *средняя долгота в эпоху:*

$$\varepsilon = \Omega + \omega + M_0. \tag{II.50}$$

Вместо ω применяют

$$\pi = \Omega + \omega \tag{II.51}$$

— долготу перицентра;
вместо M

$$l = \pi + M \tag{II.52}$$

— среднюю долготу в орбите.

§ 5. Выражения для координат и компонент скорости ИСЗ через элементы орбиты

Если при помощи интеграла орбиты (II.25) вычислить радиус-вектор спутника в заданный момент времени t, которому соответствует значение истинной аномалии v, найденной при помощи динамического интеграла, то прямоугольные координаты ИСЗ в геоцентрической системе определятся формулами

$$x = r\cdot\alpha;\quad y = r\cdot\beta;\quad z = r\cdot\gamma, \tag{II.53}$$

где α, β, γ — направляющие косинусы радиуса-вектора r относительно осей, соответственно x, y, z.

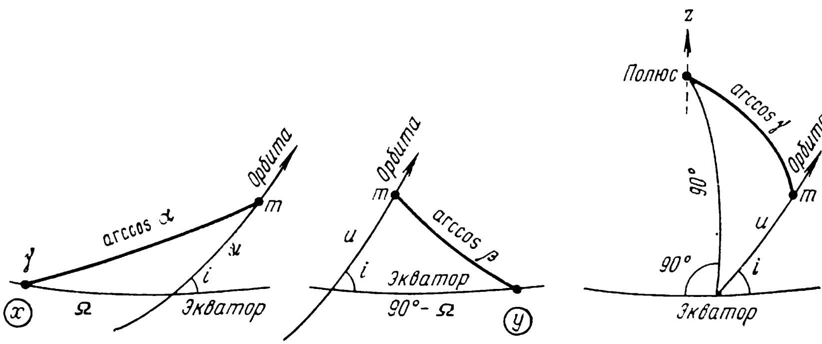

Рис. 10. Связь направляющих косинусов радиуса-вектора орбиты с элементами орбиты

В дальнейшем будем использовать величину

$$u = v + \omega, \tag{II.54}$$

называемую аргументом широты. Выражения для направляющих косинусов α, β, γ найдем из решения сферических треугольников на геоцентрической сфере: «проекция ИСЗ — восходящий узел орбиты — точка выхода заданной координатной оси» (рис. 10). Решая указанные треугольники по теореме косинусов, вместо (II.53) найдем

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i)\\ y &= r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i)\\ z &= r\sin u\sin i \end{aligned}\right\}. \tag{II.55}$$

В теории возмущений используются также направляющие косинусы α', β', γ' прямой, перпендикулярной к r и лежащей в плоскости орбиты, и, кроме того, направляющие косинусы α'',

β'', γ'' прямой, перпендикулярной к плоскости орбиты, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\partial\alpha}{\partial u}; \quad \beta' = \frac{\partial\beta}{\partial u}; \quad \gamma' = \frac{\partial\gamma}{\partial u} \\ \alpha'' &= \frac{\partial\alpha}{\partial i}; \quad \beta'' = \frac{\partial\beta}{\partial i}; \quad \gamma'' = \frac{\partial\gamma}{\partial i} \end{aligned}\right\}. \tag{II.56}$$

Дифференцируя (II.55) по t и заменяя $\dot{v}$ и $\dot{r}$ их значениями: — $\dot{v}$ из интеграла площадей, а $\dot{r}$ — из дифференцирования интеграла орбиты с заменой в нем $\dot{v}$ его значением — получим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[e\sin v(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i) + \\ &\quad + (1 + e\cos v)(-\sin u\cos\Omega - \cos u\sin\Omega\cos i)] \\ \dot{y} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[e\sin v(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i) + \\ &\quad + (1 + e\cos v)(-\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega\cos i)] \\ \dot{z} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[e\sin v\sin u\sin i + (1 + e\cos v)\cos u\sin i] \end{aligned}\right\}. \tag{II.57}$$

Если заданы лишь элементы орбиты и начальный момент времени t_0, то найдя из решения уравнения Кеплера начальное значение E_0, а затем по (II.35) v_0 и, кроме того, вычислив по интегралу орбиты начальное значение радиуса-вектора r_0 по формулам (II.55) и (II.57) могут быть вычислены *начальные условия движения*: x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$. Формулы (II.55) и (II.57) представляют собой наиболее удобный вид интегралов уравнений невозмущенного движения **в форме** (II.14), куда следует только добавить уравнение Кеплера (II.35) и интеграл орбиты.

§ 6. Принципы разложения координат невозмущенного эллиптического движения в ряды

Рассмотрим принципы разложений величин E, v, r и их функций в тригонометрические ряды относительно средней аномалии M. Основное применение эти ряды находят в теории возмущений, а также при вычислении координат небесных тел взамен решения уравнения Кеплера.

Если нужна небольшая точность, то можно использовать разложения по степеням эксцентриситета. Например, эксцентрическую аномалию с точностью до квадрата эксцентриситета можно разложить так:

$$E = E_{e=0} + e\left(\frac{dE}{de}\right)_{e=0} + \frac{1}{2!}\,e^2\left(\frac{d^2E}{de^2}\right)_{e=0} + \ldots \tag{II.58}$$

Из уравнения Кеплера находим

$$\left.\begin{aligned}
&E_{e=0} = M \\
&\left(\frac{dE}{de}\right)_{e=0} = \left(\frac{\sin E}{1 - e\cos E}\right)_{e=0} = \sin M \\
&\left(\frac{d^2E}{de^2}\right)_{e=0} = \left\{2\cos E\,\frac{dE}{de} - e\left[\sin E\cdot\left(\frac{dE}{de}\right)^2 - \cos E\times\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.\times\frac{d^2E}{de^2}\right]\right\}_{e=0} = \sin 2M
\end{aligned}\right\} \qquad (II.59)$$

и т. д., откуда

$$E = M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M + \ldots \qquad (II.60)$$

Аналогично можно получить

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{a}{r} = 1 + e\cos M + e^2\cos 2M + \ldots \\
&\frac{r}{a} = 1 - \frac{1}{2}e^2 + e\cos M + \frac{1}{2}e^2\cos 2M + \ldots \\
&v = M + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2\sin 2M + \ldots
\end{aligned}\right\}. \qquad (II.61)$$

Разложение истинной аномалии v имеет важное значение и носит название *уравнения центра*. Современная точность наблюдений такова, что в теории необходимо сохранить члены разложений порядка $e^7 \div e^9$ и даже выше. В дальнейшем потребуется еще более высокая точность. Поэтому в рассматриваемых разложениях нужно располагать общими членами, которые получить указанным только что способом довольно затруднительно. Поэтому целесообразно представлять искомые разложения в виде тригонометрических рядов.

Каждую из разлагаемых величин будем рассматривать как функцию эксцентрической аномалии, а в силу (II.60) — и как функцию средней аномалии:

$$\Phi[E(M)] \equiv \Phi(M). \qquad (II.62)$$

Не принимая пока во внимание вопросов сходимости, формально можно написать:

$$\Phi(M) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kM + B_k\sin kM), \qquad (II.63)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(M)\cos kM dM \\ B_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(M)\sin kM dM, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\}. \tag{II.64}$$

Причем, если функция Φ четная, то все $B_k=0$, если — нечетная, то все $A_k=0$; $k=0$, 1, 2, ... Оказывается, что коэффициенты A_k, B_k искомых разложений весьма просто выражаются через бесселевы функции первого рода от эксцентриситета орбиты [17].

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}\left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1\cdot(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1\cdot 2\cdot(n+1)(n+2)} - \ldots\right]. \tag{II.65}$$

при $|x| < \infty$.

Рекуррентные формулы:

$$nJ_n(x) = \frac{x}{2}\left[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right]; \tag{II.66}$$

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} \equiv J_n'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right]. \tag{II.67}$$

§ 7. Основные тригонометрические разложения *

Разложение $\cos mE$, $m=1$, 2, 3, ...:

$$\cos mE = \sum_{\frac{1}{2}e}^{0} + m\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)\right)\cos kM. \tag{II.68}$$

Разложение $\sin mE$:

$$\sin mE = m\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(J_{k+m}(ke) + J_{k-m}(ke)\right)\sin kM. \tag{II.69}$$

$$\sin E = \frac{2}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}J_k(k\ )\sin kM. \tag{II.70}$$

* Основные разложения приводятся без выводов. Подробные выкладки содержатся в учебниках [21] и [55].

Разложение эксцентрической аномалии E:

$$E = M + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke)\sin kM. \qquad \text{(II.71)}$$

Разложение радиуса-вектора r:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - e\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)\right)\cos kM. \qquad \text{(II.72)}$$

Разложение обратной величины радиуса-вектора $\frac{1}{r}$:

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke)\cos kM. \qquad \text{(II.73)}$$

Разложение $\cos v$:

$$\cos v = -e + \frac{2(1-e^2)}{e}\sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke)\cos kM. \qquad \text{(II.74)}$$

Разложение $\sin v$:

$$\sin v = \sqrt{1-e^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)\right)\sin kM. \qquad \text{(II.75)}$$

Все разложения имеют следующие преимущества по сравнению с разложениями типа (II.60), (II.61):

а) у данных разложений известны общие члены, коэффициенты которых выражаются через бесселевы функции 1-го рода;

б) вычисления коэффициентов на ЭВМ производится по весьма простой схеме: сначала при помощи рядов вида (II.65) ищутся значения бесселевых функций k и $k+1$ порядков для заданных значений индекса k; затем по рекуррентной формуле (II.66) находятся бесселевы функции более высоких порядков относительно индекса m и, наконец, вычисляются сами коэффициенты разложений. Очевидно, что вычисления здесь могут быть произведены со сколь угодно высокой точностью, которая ограничивается лишь техническими возможностями ЭВМ.

Наиболее общие разложения, имеющие фундаментальное значение в теории возмущений:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{n,m}(e)\cos kM;$$
$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv = \sum_{k=1}^{\infty} S_k^{n,m}(e)\sin kM. \qquad \text{(II.76)}$$

Обычно вместо двух разных разложений (II.76) рассматривают одно, более общее:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp\sqrt{-1}\, mv = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^{n,m}(e)\exp\sqrt{-1}\, kM. \quad \text{(II.77)}$$

Индексы n и m в (II.76) и (II.77) могут принимать любые целые положительные и отрицательные значения. Коэффициенты $X_k^{n,m}$ (e) (а также $S_k^{n,m}$ (e), $C_k^{n,m}$ (e)) носят название *коэффициентов Ганзена.*

Формула для вычисления коэффициентов Ганзена:

$$X_k^{n,m}e = \frac{1}{k(1+\beta^2)^n} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} s\cdot(-\beta)^{s-m}\cdot\binom{n-m}{s-m}\cdot F(s-m;\ -m-n;$$

$$s-m+1;\ \beta^2)\cdot J_{k-s}(ke). \quad \text{(II.78)}$$

$$F(s-n;\ -m-n;\ s-m+1;\ \beta^2) = 1 + \frac{(s-n)(-m-n)}{1\cdot(s-m+1)}\beta^2 +$$

$$+\frac{(s-n)(s-n+1)(-m-n)(-m-n+1)}{1\cdot 2\cdot(s-m+1)(s-m+2)}\beta^4 + \ . \ . \ . \quad \text{(II.79)}$$

— гипергеометрическая функция.

Существуют другие формулы для коэффициентов Ганзена [11, 12].

Выражения с небольшим числом членов даны в [55]; там же дана ссылка на работу Ярнагина, содержащую разложения коэффициентов Ганзена с точностью до e^{20}. Все перечисленные разложения абсолютно сходятся для значений эксцентриситета в интервале

$$0 \leqslant e < e_1,$$

где $e_1 = 0{,}6627...$ (предел Лапласа).

§ 8. Вычисление невозмущенной эфемериды ИСЗ

Под эфемеридой в астрономии понимается таблица значений видимых координат небесного тела на заданные моменты времени. Исходные данные для вычисления эфемериды ИСЗ:

1) элементы орбиты Ω, i, ω, a, e, τ;

2) координаты ξ, η, ζ некоторого пункта на земной поверхности в геоцентрической инерциальной системе;

3) момент времени $t \equiv UT1$ в системе всемирного времени.

Требуется: для данного пункта на заданный момент времени вычислить топоцентрическое прямое восхождение α', топоцентрическое склонение δ' и топоцентрический радиус-вектор r' ИСЗ.

На практике необходимо, чтобы в вычисленных координатах ИСЗ были учтены возмущения.

Поэтому: 1) для системы элементов орбиты обычно указывается эпоха $t_0 \equiv UT1^{(0)}$, к которой они отнесены; 2) по формулам теории возмущений вычисляются величины возмущений в каждом элементе орбиты за интервал времени $t - t_0$; 3) образуется система возмущенных элементов путем прибавления к заданным элементам величин их возмущений. Теория возмущений заранее построена так, что вычисления реальной, т. е. *возмущенной эфемериды* ИСЗ производится по тем же формулам, что и вычисление невозмущенной. Одновременно с вычислением эфемериды рассчитывают условия видимости ИСЗ для данного пункта (гл. III).

Порядок вычисления эфемериды:

1) находим среднюю аномалию M на заданный момент по формуле (II.41) (о вычислении возмущенной средней аномалии см. § 12, формула (II.127); 2) находим истинную аномалию v либо по уравнению центра (II.96), либо по формуле (II.35), для чего предварительно нужно решить уравнение Кеплера (II.40) — (II.42) и найти эксцентрическую аномалию E. Первый путь предпочтительнее при малых эксцентриситетах, второй — при больших, особенно, если эксцентриситет больше предела Лапласа. Одновременно с v находим аргумент широты u по формуле (II.54); 3) вычисляем геоцентрический радиус-вектор ИСЗ по формулам (II.25) и (II.32); 4) находим геоцентрические прямоугольные координаты ИСЗ x, y, z по формулам (II.55). Компоненты скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, если их вычисление входит в условие задачи, находятся по формулам (II.57); 5) находим прямоугольные топоцентрические координаты спутника

$$x' = x - \xi; \quad y' = y - \eta, \quad z' = z - \zeta; \tag{II.80}$$

6) и, наконец, находим топоцентрические экваториальные координаты и топоцентрический радиус-вектор ИСЗ:

$$\left.\begin{aligned} r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ \operatorname{tg}\alpha' &= \frac{y'}{x'}; \quad \operatorname{tg}\delta' = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \end{aligned}\right\}. \tag{II.81}$$

§ 9. Определение элементов предварительной орбиты из наблюдений

Любая из измеренных координат q_j спутника есть функция шести искомых элементов орбиты и времени t *:

$$q_j = q_j(t_j, \Omega, i, \omega, a, e, \tau); \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ \ldots \tag{II.82}$$

* В § 9 и 10 рассмотрена принципиальная сторона решения задачи на основе метода Гаусса. Разнообразные практические приемы определения орбит содержатся в [55] и [60].

Тогда для определения элементов орбиты нужно найти из наблюдений по крайней мере шесть различных значений координат q_j, где $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$, чтобы вытекающие из формул невозмущенного движения уравнения (II.82) могли быть в принципе решены.

При наблюдениях ИСЗ могут измеряться (см. гл. IV):

а) топоцентрические направления на спутник (т. е. α', δ');

б) топоцентрические расстояния до спутника (т. е. r');

в) направления и расстояния до ИСЗ;

г) скорости или ускорения ИСЗ в заданном направлении.

Обычно для определения орбиты с одного или нескольких пунктов производят возможно бо́льшее число наблюдений спутника. Определение орбиты разбивают на два этапа:

1) из всех наблюдений выбирают минимально необходимое число измерений (согласно (II.82) и определяют так называемую предварительную орбиту; 2) используя все измерения, уточняют элементы предварительной орбиты — это операция уточнения орбиты, дающая элементы окончательной орбиты (см. § 10).

Рассмотрим принципиальное решение задачи, основанное на способе Гаусса.

Пусть в моменты времени t_1, t, t_2 (в системе $UT1$), выбранные из всех совокупности наблюдений (причем $t_1<t<t_2$), с пункта на земной поверхности с геоцентрическими координатами в инерциальной системе ξ_1, η_1, ζ_1; ξ, η, ζ; ξ_2, η_2, ζ_2; $(\zeta_1= =\zeta=\zeta_2)$ определены из наблюдений топоцентрические координаты ИСЗ α_1', δ_1'; α', δ'; α_2'; δ_2'. Будем считать, что эти координаты отнесены к стандартной эпохе 1950,0 инерциальной системы и исправлены за спутниковые рефракцию и аберрацию (гл. III). Можно также полагать, что каждое наблюдение выполнено с отдельного пункта, так что в каждый из моментов времени даны координаты разных пунктов.

Первой операцией является вычисление топоцентрических расстояний r_1', r', r_2' ИСЗ в моменты t_1, t, t_2. На основании (II.16) три момента времени дают линейную однородную алгебраическую систему

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{II.83}$$

Необходимым условием существования решения этой системы является равенство нулю ее определителя. Разлагая определитель системы последовательно по элементам первого, второго и третьего столбцов и приравнивая полученные выражения нулю, а также замечая, что выражение, например, вида $(yz_2—y_2z)$ равно

$$yz_2 - y_2z = 2\,[rr_2] \cos j_{yz}, \tag{II.84}$$

где $[rr_2]$ — площадь треугольника, составленного из геоцентрических радиусов-векторов ИСЗ r и r_2 и стягивающей их хорды, $\cos j_{yz}$ — направляющий косинус плоскости этого треугольника относительно плоскости yz, мы можем записать

$$
\begin{aligned}
x_1 \frac{[rr_2]}{[r_1 r_2]} + x_2 \frac{[r_1 r]}{[r_1 r_2]} &= x, \\
y_1 \frac{[rr_2]}{[r_1 r_2]} + y_2 \frac{[r_1 r]}{[r_1 r_2]} &= y, \\
z_1 \frac{[rr_2]}{[r_1 r_2]} + z_2 \frac{[r_1 r[}{[r_1 r_2]} &= z.
\end{aligned} \qquad \text{(II.85)}
$$

Площади треугольников, входящие в (II.85), указаны на рис. 11. Заранее эти площади неизвестны. Обычно интервал времени выбирают так, чтобы площади треугольников достаточно мало отличались от площадей соответствующих эллиптических секторов (см. рис. 11). Тогда на основании второго закона Кеплера и вводя обозначения, можно написать

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{[rr_2[}{[r_1 r_2]} &= A \approx \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} = A_1 \\
\frac{[r_1 r]}{[r_1 r_2]} &= B \approx \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = B_1
\end{aligned}
\right\}. \qquad \text{(II.86)}
$$

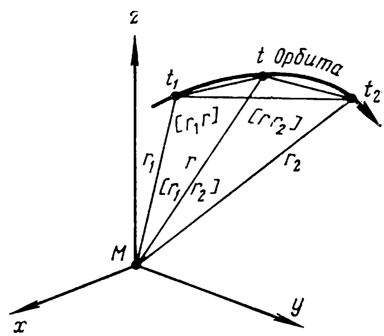

Рис. 11. Взаимное расположение треугольников, составленных радиусами-векторами орбиты и стягивающими их хордами

Обозначив для каждого из моментов

$$
\lambda = \cos\delta' \cos\alpha'; \quad \mu = \cos\delta' \sin\alpha'; \quad \nu = \sin\delta' \qquad \text{(II.87)}
$$

и используя связь между геоцентрическими и топоцентрическими координатами

$$
x = r'\lambda + \xi; \quad y = r'\mu + \eta; \quad z = r'\nu + \zeta, \qquad \text{(II.88)}
$$

а также подставив (II.88) и (II.86) в (II.85), получим три уравнения с тремя неизвестными:

$$
\left.
\begin{aligned}
\lambda_1 A_1 r_1' - \lambda r' + \lambda_2 B_1 r_2' &= A_1 \xi_1 - \xi + B_1 \xi_2 \\
\mu_1 A_1 r_1' - \mu r' + \mu_2 B_1 r_2' &= A_1 \eta_1 - \eta + B_1 \eta_2 \\
\nu_1 A_1 r_1' - \nu r' + \nu_2 B_1 r_2' &= \zeta (A_1 + B_1 - 1)
\end{aligned}
\right\}. \qquad \text{(II.89)}
$$

Исключая из (II.89) ненужную в дальнейшем величину r', находят в первом приближении r_1' и r_2' для моментов t_1 и t_2. Затем по формулам (II.88) можно вычислить в *первом при-*

ближении геоцентрические координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 ИСЗ и приближенные геоцентрические экваториальные координаты

$$\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \frac{y_{1,2}}{x_{1,2}}, \quad \operatorname{tg}\delta_{1,2} = \frac{z_{1,2}}{\sqrt{x_{1,2}^2 + y_{1,2}^2}}, \quad r_{1,2} = \sqrt{x_{1,2}^2 + y_{1,2}^2 + z_{1,2}^2}. \qquad \text{(II.90)}$$

Затем из решения прямоугольного сферического треугольника «узел орбиты — ИСЗ — проекция ИСЗ на экватор» (рис. 12) находим в первом приближении долготу восходящего узла Ω, наклон орбиты i и аргументы широты u_1 и u_2. Так как

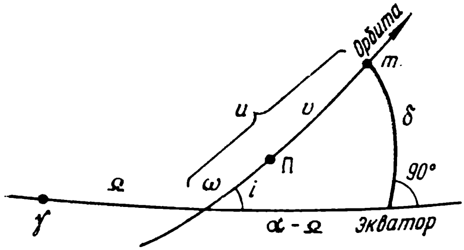

Рис. 12. Связь геоцентрического склонения с элементами орбиты

$$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg}\delta_1 \operatorname{cosec}(\alpha_1 - \Omega) = \operatorname{tg}\delta_2 \operatorname{cosec}(\alpha_2 - \Omega) \qquad \text{(II.91)}$$

и

$$\alpha_2 - \Omega = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_1 - \Omega),$$

то

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg}\delta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\operatorname{tg}\delta_2 - \operatorname{tg}\delta_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)},$$
$$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg}\delta_1 \csc(\alpha_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg}\delta_2 - \operatorname{tg}\delta_1 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos(\alpha_1 - \Omega)\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \qquad \text{(II.92)}$$

кроме того:

$$\cos u_{1,2} = \cos\delta_{1,2} \cos(\alpha_{1,2} - \Omega). \qquad \text{(II.93)}$$

Затем вычисляем в первом приближении фокальный параметр орбиты P. Гауссом введено понятие отношения η площади эллиптического сектора к площади соответствующего треугольника. В данном случае

$$\eta = \frac{\sqrt{\mu P}\,(t_2 - t_1)}{r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)}. \qquad \text{(II.94)}$$

Если разность $t_2 - t_1$ достаточно мала, то можно приближенно положить $\eta \approx 1$ и найти приближенное значение P. Целесообразнее же независимо вычислить η из решения специальной системы уравнений Гаусса:

$$\begin{cases} \eta^3 - \eta^2 = mX(x); \\ x = m\eta^{-2} - l, \end{cases} \qquad \text{(II.95)}$$

где

$$x = \sin^2 \frac{E_2 - E_1}{4}; \quad X(x) = \frac{(E_2 - E_1) - \sin(E_2 - E_1)}{\sin^3 \frac{E_2 - E_1}{2}};$$

$$m = \frac{\mu (t_2 - t_1)}{8 (r_1 r_2)^{3/2} \cos \frac{u_2 - u_1}{2}}; \quad l = \frac{1}{2} \left(\frac{r_1 - r_2}{2 \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{u_2 - u_1}{2}} - 1 \right). \tag{II.96}$$

Система (II.95) решается методом приближений. Практические приемы решения подробно описаны в [55, 60]. В первом приближении достаточно использовать приближенную формулу [55]

$$\eta = 1 + \frac{4}{3} m \left[1 - 1{,}1 \left(\frac{4}{3} m \right) - 1{,}2 l \right]. \tag{II.97}$$

Найдя η, при помощи (II.94) определяем фокальный параметр

$$P = \eta^2 \frac{[r_1 r_2 \sin (u_2 - u_1)]^2}{\mu (t_2 - t_1)^2}. \tag{II.98}$$

Затем выполняется второе приближение: только что описанным способом находятся два остальных отношения площадей эллиптических секторов к площадям треугольников. Зная эти отношения, вместо A_1 и B_1 (II.86), находим уточненные значения отношений площадей треугольников A и B, которые подставляем в систему (II.89), и все вычисления, начиная с решения системы (II.89) и кончая формулой (II.98), проводим заново. Аналогично могут быть выполнены третье и последующие приближения. В среднем бывает достаточно двух, реже — трех приближений.

Далее при помощи интеграла орбиты находим истинные аномалии

$$\operatorname{tg} v_1 = \frac{\frac{P - r_1}{r_1} \cos (u_2 - u_1) - \frac{P - r_2}{r_2}}{\frac{P - r_1}{r_1} \sin (u_2 - u_1)}; \tag{II.99}$$

$$v_2 = v_1 + (u_2 - u_1); \tag{II.100}$$

эксцентриситет орбиты

$$e = \frac{P - r_1}{r_1 \cos v_1} = \frac{P - r_2}{r_2 \cos v_2} \tag{II.101}$$

и долготу перицентра от узла

$$\omega = u_1 - v_1 = u_2 - v_2. \tag{II.102}$$

Находим большую полуось и среднее движение

$$a = P(1 - e^2)^{-1}, \quad n = \sqrt{\mu}\, a^{-\frac{3}{2}}. \qquad \text{(II.103)}$$

Затем — эксцентрические аномалии

$$E_{1,2} = 2 \operatorname{arc\,tg} \left[\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v_{1,2}}{2} \right] \qquad \text{(II.104)}$$

и, при помощи уравнения Кеплера, момент прохождения через перицентр

$$\tau = t_1 - \frac{1}{n}(E_1 - e \sin E_1) = t_2 - \frac{1}{n}(E_2 - e \sin E_2), \qquad \text{(II.105)}$$

Найденные элементы орбиты относим к моменту

$$t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \qquad \text{(II.106)}$$

и вычисляем начальное значение средней аномалии M_0, соответствующее этому моменту:

$$M_0 = n(t_0 - \tau). \qquad \text{(II.107)}$$

Если топоцентрические расстояния измеряются непосредственно, так что в два момента известны пространственные положения ИСЗ (см. гл. V), то все вычисления начинаются с формулы (II.90), что значительно упрощает обработку.

§ 10. Уточнение орбиты

Для удобства любой из элементов орбиты будем обозначать буквой «$Э$».

Пусть дан набор n определений топоцентрических положений ИСЗ:

$$\left.\begin{array}{l} t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n \\ \alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \ldots,\ \alpha'_n \\ \delta'_1,\ \delta'_2 \ldots,\ \delta'_n \end{array}\right\} \qquad \text{(II.108)}$$

и даны элементы предварительной орбиты $Э_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, отнесенные к моменту $t_0 : t_1 < t_0 < t_n$. Пусть также на основе элементов предварительной орбиты по формулам вычисления эфемериды (§ 8) для каждого из моментов t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, найдены топоцентрические координаты ИСЗ $\alpha'_{k_{\text{выч}}}$, $\delta'_{k_{\text{выч}}}$. Если бы элементы предварительной орбиты были безошибочны, а также отсутствовали бы возмущения, то вычисленные координаты ИСЗ совпали бы с наблюденными. Предположим, что по формулам теории возмущенного движения для всех интервалов времени $t_k - t_0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, вычислили величины возмущений в каждой координате $\delta\alpha_k$ и $\delta\delta_k$ и освободили наблюденные значения координат ИСЗ от влияния возмущений:

$$\begin{aligned} \alpha'_{k_0} &= \alpha'_k - \delta\alpha_k \\ \delta'_{k_0} &= \delta'_k - \delta\delta_k \end{aligned} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(II.109)}$$

Тогда разница между наблюденными и вычисленными координатами ИСЗ будет функцией искомых поправок к элементам предварительной орбиты. Представив эту разницу в виде ряда и ограничиваясь первыми степенями разложения, получим $2n$ уравнений погрешностей:

$$\begin{aligned} \alpha'_{k_0} - \alpha'_{k_{\text{выч}}} &= \Delta\alpha'_k = \sum_{s=1}^{6} \left(\frac{\partial \alpha'_k}{\partial Э_s}\right)_0 \Delta Э_s, \\ \delta'_{k_0} - \delta'_{k_{\text{выч}}} &= \Delta\delta'_k = \sum_{s=1}^{6} \left(\frac{\partial \delta'_k}{\partial Э_s}\right)_0 \Delta Э_s, \end{aligned} \quad k = 1, 2, \ldots, n; \qquad \text{(II.110)}$$

где $\Delta Э_s$ — искомые поправки к элементам орбиты.

Производные, являющиеся коэффициентами в (II.110), могут быть вычислены так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \alpha'}{\partial Э_s} &= \frac{\partial \alpha'}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial Э_s} + \frac{\partial \alpha'}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial Э_s} \\ \frac{\partial \delta'}{\partial Э_s} &= \frac{\partial \delta'}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial Э_s} + \frac{\partial \delta'}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial Э_s} + \frac{\partial \delta'}{\partial z'} \frac{\partial z}{\partial Э_s} \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.111)}$$

причем в силу (II.80)

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = 1. \qquad \text{(II.112)}$$

Формулы для вычисления производных от топоцентрических экваториальных координат по топоцентрическим прямоугольным могут быть получены дифференцированием соотношений (II.81), формулы для производных от геоцентрических координат по элементам орбиты — дифференцированием выражений (II.55). При современной точности наблюдений ИСЗ для вычисления величин (II.109) достаточно учитывать вековые возмущения (см. § 16) от полярного сжатия Земли в долготе узла, долготе перицентра и начальной эпохе, а также вековые возмущения от сопротивления атмосферы (см. § 19) в большой полуоси орбиты и в ее эксцентриситете. Иногда учитываются наиболее крупные периодические возмущения. Предварительно возмущения можно не учитывать, не вычисляя (II.109), а учитывать их в процессе решения уравнений (II.110). Тогда свободными членами в этих уравнениях будут величины $\alpha'_k - \alpha'_{k_{\text{выч}}}$

и $\delta'_k - \delta'_{k_{\text{выч}}}$, а формулы для коэффициентов (II.111) следует помножить на производные $\frac{\partial Э_s}{\partial Э_{0s}}$, где $Э_s$ — возмущенные элементы орбиты, $Э_{0s}$ — невозмущенные. Формулы для вычисления этих производных, называемых изохронными, получаются дифференцированием формул для перечисленных выше возмущений. Составив уравнения (II.110), решают их по способу наименьших квадратов и находят вероятнейшие поправки $\Delta Э_s$ к элементам предварительной орбиты, получая тем самым элементы окончательной орбиты:

$$Э_{0s} = Э_s + \Delta Э_s \text{ в момент } t_0 \quad s = 1, 2, \ldots, 6.$$

Такова принципиальная схема уточнения орбиты. На практике уточнение орбиты выполняется в процессе реализации орбитального метода космической геодезии (гл. VI).

§ 11. Уравнения возмущенного движения ИСЗ

Предположим теперь, что на спутник действует некоторая дополнительная сила. Тогда можно утверждать, что движение ИСЗ будет отличаться от движения по законам Кеплера, а правые части уравнений движения (II.4) будут отличны от нуля. Поэтому вместо (II.4) можно формально записать

$$\ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} = X; \quad \ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} = Y; \quad \ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} = Z, \qquad \text{(II.113)}$$

где X, Y, Z — возмущающие ускорения, создаваемые дополнительной силой. Имея в виду возмущающие факторы, действующие на движение спутника, возмущающие ускорения можно представить в виде сумм

$$X = \sum_{j=0}^{5} X_j; \quad Y = \sum_{j=0}^{5} Y_j; \quad Z = \sum_{j=0}^{5} Z_j, \qquad \text{(II.114)}$$

где $j=0$ соответствует возмущающим ускорениям в движении ИСЗ, вызываемым возмущающей частью геопотенциала, $j=1$, 2 — возмущающим ускорениям, вызываемым соответственно Луной и Солнцем; $j=3$, 4 — возмущающим ускорениям от сопротивления атмосферы и светового давления, $j=5$ — возмущающим ускорениям от действия всех прочих более мелких факторов.

Уравнения возмущенного движения ИСЗ в гравитационном поле Земли.

За обобщенные координаты, как и раньше, примем геоцентрические инерциальные координаты ИСЗ $q_1=x$, $q_2=y$, $q_3=z$, а за обобщенные скорости — величины $\dot{q}_1=\dot{x}$, $\dot{q}_2=\dot{y}$, $\dot{q}_3=\dot{z}$. Составим лагранжиан L. Кинетическая энергия ИСЗ определится формулой (II.12), потенциальная же энергия системы Земля — спутник определится внешним гравитационным потенциалом Земли, который будем обозначать буквой U*. Положим для удобства массу спутника равной единице ($m=1$), запишем лагранжиан так:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z). \qquad \text{(II.115)}$$

Подставляя L в уравнения Лагранжа II рода (II.11), получим уравнения возмущенного движения

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad \text{(II.116)}$$

Представив геопотенциал в форме

$$U = \frac{\mu}{r} + R_0, \qquad \text{(II.117)}$$

где R_0 — возмущающая часть геопотенциала, вместо (II.117) получим

$$\ddot{x} + \mu\frac{x}{r^3} = \frac{\partial R_0}{\partial x}, \quad \ddot{y} + \mu\frac{y}{r^3} = \frac{\partial R_0}{\partial y}; \quad \ddot{z} + \mu\frac{z}{r^3} = \frac{\partial R_0}{\partial z}. \qquad \text{(II.118)}$$

Итак, возмущающие ускорения X_0, Y_0, Z_0 в (II.114) равны производным, стоящим в правых частях *уравнений возмущенного движения* ИСЗ (II.118) в гравитационном поле Земли. R_0, представляемую обычно разложением по сферическим функциям (см. § 15), в данном случае называют *возмущающей или пертурбационной функцией.*

Уравнения возмущенного движения ИСЗ под действием Луны и Солнца.

Здесь мы имеем дело с задачей четырех тел: Земля — спутник — Луна — Солнце. Часто рассматривают отдельно две задачи трех тел: Земля — ИСЗ — Луна, Земля — ИСЗ — Солнце.

Уравнения движения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + f(m_0 + m)\frac{x}{r^3} &= fm_1\left(\frac{x_1 - x}{\Delta} - \frac{x_1}{r_1^3}\right) = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \ddot{y} + f(m_0 + m)\frac{y}{r^3} &= fm_1\left(\frac{y_1 - y}{\Delta} - \frac{y_1}{r_1^3}\right) = \frac{\partial R}{\partial y} \\ \ddot{z} + f(m_0 + m)\frac{z}{r^3} &= fm_1\left(\frac{z_1 - z}{\Delta} - \frac{z_1}{r_1^3}\right) = \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(II.119)}$$

---

* В астрономии потенциальные функции имеют обозначения, отличные от обозначений в теории фигуры Земли.

где

$$R = fm_1\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}\right) = fm_1\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r_1^2}\cos\psi\right) \quad (\text{II}.120)$$

—пертурбационная функция задачи трех тел. Здесь без индекса — величины, относящиеся к изучаемому телу (материальной точке!), называемому *возмущаемым*; индексом «1» снабжены величины, относящиеся к третьему телу, называемому *возмущающим*. Величины Δ (взаимное расстояние) и r_1 — указаны на рис. 13. Если m — масса спутника, а m_1 — масса Луны или Солнца, то полагая $m=0$, $m_0=M$ (масса Земли) и приняв, что оси x, y, z совпадают с направлением осей земной инерциальной системы координат, можно считать, что уравнения (II.119) есть уравнения возмущенного движения ИСЗ под действием либо Луны, либо Солнца.

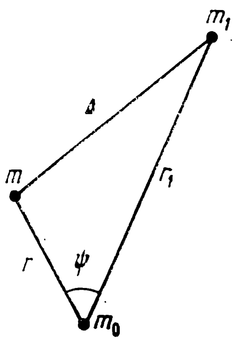

Рис. 13. Взаимное расположение материальных точек в задаче трех тел

При $m=0$ имеем дело с так называемой *ограниченной задачей трех тел*. При отсутствии негравитационных возмущающих ускорений эти уравнения допускают интегралы площадей и интеграл энергии; кроме того, известен следующий результат: для большинства отрицательных значений постоянной энергии h и если негравитационные силы отсутствуют, ИСЗ достаточно долго будет находиться на конечном, отличном от нуля, расстоянии от Земли.

Уравнения (II.119) можно получить, проектируя возмущающие ускорения на координатные оси.

§ 12. Дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов орбиты

В возмущенном движении, в отличие от невозмущенного, элементы орбиты являются величинами переменными. Одним из основных методов определения возмущений в небесной механике, на который будем опираться, является метод определения возмущений в элементах орбиты. С этой целью Лагранжем было введено понятие оскулирующей орбиты. Предположим, что в процессе движения материальной точки по возмущенной орбите в какой-то момент времени t_1 возмущения перестали действовать. Очевидно, что после этого момента материальная точка будет двигаться по некоторой кеплеровой невозмущенной орбите с элементами $Э_1$, причем в момент t_1 эта орбита будет иметь общую точку с возмущенной орбитой. Понятно, что таких точек на возмущенной орбите можно выбрать сколь угодно много и сколь угодно близко друг к другу, всякий раз полагая, что возмущения исчезают. Тем самым можно получить бесчисленное множество невозмущенных орбит с разными элементами, каждая из которых имеет общую точку с возмущенной орбитой. Таким образом, возмущенную орбиту можно представить невозмущенной кеплеровой орбитой с переменными элементами, во всякий момент имеющей с возмущенной орбитой одну общую точку. Такая кеплерова орбита называется оскулирующей. Точка соприкосновения оскулирующей и возмущенной орбит называется точкой оскуляции, а соответствующий этой точке момент времени — эпохой оскуляции. Из определения оскулирующей орбиты следует, что если эпохи двух оскулирующих орбит отличаются на малую величину, то на малые же величины отличаются элементы этих орбит (рис. 14). В любой заданный момент времени, если известны элементы оскулирующей орбиты, положение материальной точки может быть вычислено по формулам невозмущенного движения.

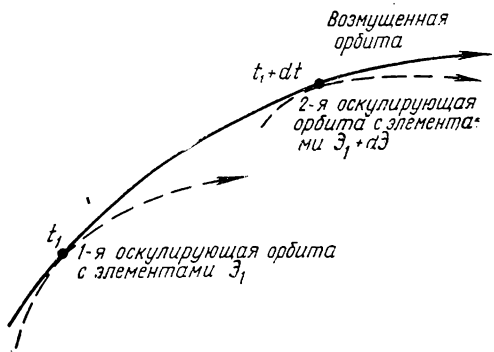

Рис. 14. Возмущенная и оскулирующая орбиты

Запишем уравнения возмущенного движения так:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}+\mu\frac{x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (\ .\ .\ .\ = X) \\ \ddot{y}+\mu\frac{y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}, \quad (\ .\ .\ .\ = Y) \\ \ddot{z}+\mu\frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (\ .\ .\ .\ = Z) \end{aligned}\right\}, \qquad (II.121)$$

где правые части могут выражаться либо через производные от пертурбационной функции, если движение происходит только в гравитационном поле, либо через возмущающие ускорения — в общем случае. Понизим порядок системы (II.121)

$$x' = \dot{x}, \quad \dot{x}' + \mu\frac{x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (\ .\ .\ .\ = X), \qquad (II.122)$$

$$.\ .\ .\ \quad .\ .\ .\ \quad .\ .\ .$$

Так как в каждый текущий момент времени движение по оскулирующему эллипсу может быть описано формулами невозмущенного движения

$$x = x(t, \underset{\bullet}{Э}_1, \ldots, \underset{\bullet}{Э}_6); \quad x' = x'(t, \underset{\bullet}{Э}_1, \ldots, \underset{\bullet}{Э}_6), \tag{II.123}$$

где элементы орбиты $Э_1$, ..., $Э_6$ — также функции времени t, то дифференцируя (II.123) по t, будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial x}{\partial Э_j} \frac{dЭ_j}{dt}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}' &= \frac{\partial x'}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial x'}{\partial Э_j} \frac{dЭ_j}{dt}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{II.124}$$

Подставляя (II.124) в (II.122) и приравнивая нулю выражения вида

$$\frac{\partial x}{\partial t} - x', \ \ldots, \ \frac{\partial x'}{\partial t} + \mu \frac{x}{r^3}, \ \ldots,$$

получим шесть уравнений с шестью неизвестными $\frac{dЭ_1}{dt}$, ..., $\frac{dЭ_6}{dt}$:

$$\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial x}{\partial Э_j} \cdot \frac{\partial Э_j}{\partial t} = 0; \quad \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial x'}{\partial Э_j} \frac{\partial Э_j}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial x}, \ (\ldots = X), \tag{II.125}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Вычисляя коэффициенты $\frac{\partial x}{\partial Э_j}$, ..., $\frac{\partial x'}{\partial Э_j}$, ..., линейной алгебраической системы (II.125) путем дифференцирования формул невозмущенного движения (II.55) и (II.57) и решая эту систему относительно неизвестных $\frac{d\dot{Э}_j}{dt}$, $j = 1, 2, \ldots, 6$, получаем искомые дифференциальные уравнения для элементов оскулирующей орбиты. В случае эллиптического движения удобно использовать элементы: Ω, i, π, a, e, ε (см. § 4). Если речь идет о движении лишь в гравитационном поле, то после описанных операций получаем уравнения Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial i}\\
\frac{di}{dt} &= \frac{-\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)\\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\,\frac{\partial R}{\partial e}\\
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\,\frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial e}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.126)}$$

где n — среднее движение, а возмущенная средняя аномалия после интегрирования системы (II.126) вычисляется по формуле

$$M = \varepsilon - \pi + \int_{t_0}^{t} n\,dt. \qquad \text{(II.127)}$$

Если движение происходит не только под действием гравитационных сил, то в общем случае имеем уравнения Ньютона:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{P}\operatorname{cosec} i \sin u\cdot W'\\
\frac{di}{dt} &= \frac{r}{P}\cos u\cdot W'\\
\frac{d\pi}{dt} &= -\frac{\cos v}{e}S' + \frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{P}\right)T' + \frac{r}{P}\sin u\cdot\operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot W'\\
\frac{da}{dt} &= \frac{2ea^2\sin v}{P}S' + \frac{2a^2}{r}\cdot T'\\
\frac{de}{dt} &= \sin v\cdot S' + (\cos v + \cos E)\cdot T'\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -2\frac{r}{P}\sqrt{1-e^2}\cdot S' + \frac{r}{P}\sin u\cdot\operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot W' + \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\times\\
&\quad\times\left[-\cos v\cdot S' + \sin v\left(1+\frac{r}{P}\right)T'\right]
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.128)}$$

где

$$S' = \sqrt{\frac{P}{\mu}} S'\ T' = \sqrt{\frac{P}{\mu}} T,\ W' = \sqrt{\frac{P}{\mu}} W, \qquad (II.129)$$

$P = a(1-e^2)$ — фокальный параметр, S — радиальная составляющая возмущающего ускорения (направлена вдоль радиуса-вектора орбиты), T — трансверсальная составляющая (лежит в плоскости оскулирующей орбиты, перпендикулярна к S и направлена в сторону орбитального движения), W — бинормальная составляющая возмущающего ускорения (перпендикулярна к S и T и направлена так, чтобы тройка векторов S, T, W была правой) (рис. 15.)

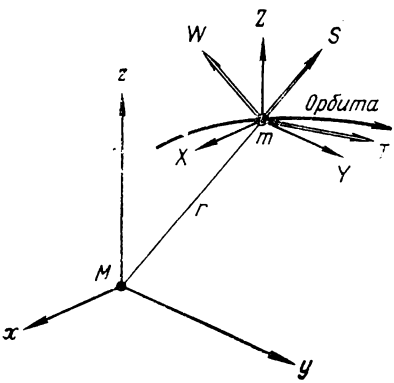

Рис. 15. Взаимное расположение возмущающих ускорений

Переход от составляющих возмущающего ускорения X, Y, Z к составляющим S, T, W осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} S &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ T &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \qquad (II.130) \\ W &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z, \end{aligned}$$

где α, β, γ — коэффициенты при r в формулах (II.55), а α', β', γ'; α'', β'', γ'' — выражаются формулами (II.56). Если в правых частях уравнений для π и e нужно избавиться от особенности при $e=0$, то вместо этих элементов вводят новые элементы по формулам

$$h = e \sin \pi, \quad k = e \cos \pi. \qquad (II.131)$$

Если необходимо также избавиться от особенности при $i = 0°$ в уравнениях для Ω и i, то вместо Ω и i вводят элементы P' и q' по формулам

$$P' = \operatorname{tg} i \sin \Omega; \quad q' = \operatorname{tg} i \cos \Omega. \qquad (II.132)$$

Нужно заметить, что неудобства при $e \to 0$ и $i \to 0$ чаще всего несущественны [55].

В уравнениях Лагранжа иногда вместо a, e и ε пользуются элементами n, $P = a(1-e^2)$, $\overline{M}_0 = \varepsilon - \pi$:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{na} \left(\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \qquad (II.133) \\ \frac{d\overline{M}_0}{dt} &= -\frac{1-e^2}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a}. \end{aligned}$$

Если вместо π используем ω, то

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\,\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial i}. \quad (\omega = \pi - \Omega). \qquad (II.134)$$

Если применяются уравнения Ньютона, но изучается движение лишь в гравитационном поле, то составляющие возмущающего ускорения могут быть найдены по формулам

$$S = \frac{\partial R}{\partial r}, \; T = \frac{1}{r}\,\frac{\partial R}{\partial \omega}, \; W = \frac{1}{r\sin u}\,\frac{\partial R}{\partial i}, \qquad (II.135)$$

получаемым приравниванием правых частей уравнений Лагранжа правым частям соответствующих уравнений Ньютона.

Различные формы уравнений Лагранжа и Ньютона содержатся в [21, 55]. В конечном виде все перечисленные уравнения не интегрируются.

§ 13. Методы приближенного аналитического интегрирования уравнений для оскулирующих элементов орбиты

Уравнения Лагранжа (или уравнения Ньютона) представляют собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно из теории дифференциальных уравнений, решение заданной системы существует в некоторой окрестности начальных условий, если правые части уравнений в этой окрестности ограничены по модулю сверху.

Основными аналитическими методами приближенного интегрирования уравнений возмущенного движения являются метод последовательных приближений — метод Пикара и метод малого параметра Пуанкаре. Перед интегрированием правые части уравнений Лагранжа или Ньютона должны быть явно выражены через элементы орбиты и независимую переменную. Правые части каждого уравнения в этом случае обычно пропорциональны некоторому малому параметру $|\sigma| < 1$. Будем считать, что систему (II.126) или (II.128) привели к виду

$$\dot{Э}_j = \sigma f_j(Э_1, \; . \; . \; . \; , Э_6, t), \; j = 1, 2, \; . \; . \; . \; , 6 \qquad (II.136)$$

с начальными условиями t_0, $Э_{10}$, ..., $Э_{60}$.

1. Метод Пикара.

Первое приближение находится по формуле

$$Э_j^{(1)} = Э_{j0} + \sigma\int_{t_0}^{t} f_j(Э_{10}, \; . \; . \; . \; , Э_{60}, t)\,dt, \; j = 1, \; . \; . \; . \; , 6; \quad (II.137)$$

второе приближение:

$$Э_j^{(2)} = Э_{j0} + \sigma\int_{t_0}^{t} f_j(Э_1^{(1)}, \; . \; . \; . \; , Э_6^{(1)}, t)\,dt, \quad j = 1, \; . \; . \; . \; , 6;$$

k —е приближение:

$$Э_j^{(k)} = Э_{j0} + \sigma \int\limits_{t_0}^{t} f_j \left(Э_1^{(k-1)}, \; . \; . \; . \; , Э_6^{(k-1)}, t\right) dt, \; j = 1, \; . \; . \; . \; , 6.$$

В каждом приближении под интегралами стоят известные функции времени, так что интегралы, по крайней мере формально, могут быть вычислены. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что при условиях теоремы существования решения данный процесс равномерно сходится к точному решению заданной системы уравнений.

2. Метод малого параметра.

Решение системы (II.182) ищется в виде рядов:

$$Э_j = Э_{j0} + \sigma\delta Э_{j1} + \sigma^2\delta Э_{j2} + \; . \; . \; . + \sigma^k \delta Э_{jk} + \; . \; . \; . \; , \quad \text{(II.138)}$$

$$j = 1, 2, \; . \; . \; . \; , 6.$$

А. Пуанкаре доказал, что если при перечисленных в начале этого параграфа условиях правые части (II.136) являются также аналитическими функциями σ, то ряды (II.138) будут сходиться при достаточно малых значениях σ. Члены рядов (II.138) называют: $\sigma\delta Э_{j1}$ — возмущения первого порядка, $\sigma^2\delta Э_{j2}$ — возмущения второго порядка и т. д.

Из (II.137) следует, что вычисление возмущений первого порядка совпадает с вычислением первого приближения в методе Пикара

$$\delta\sigma Э_{j1} = \sigma \int\limits_{t_0}^{t} f_j (Э_{10}, \; . \; . \; . \; , Э_{60}, t)\, dt. \quad \text{(II.139)}$$

Представив под интегралами во второй формуле (II.137) элементы орбиты в виде $Э_j^{(1)} = Э_{j0} + \sigma\delta Э_{j1}$, разложив подынтегральные функции в ряды по степеням $\sigma\delta Э_{j1}$ и ограничившись членами порядка σ^2, получим формулу для вычисления возмущений второго порядка

$$\sigma^2 \delta Э_{j2} = \sigma^2 \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{s=1}^{6} \delta Э_{s1} \frac{\partial f_j}{\partial Э_{s0}}\, dt. \quad \text{(II.140)}$$

Аналогичным образом можно получить формулы для вычисления возмущений третьего и последующих порядков.

Ввиду малости возмущающих факторов основную часть возмущений обычно описывают возмущения первого порядка. При вычислениях высокой точности — соответствующей максимальной точности наблюдений — учитывают и возмущения второго порядка. Иногда приходится учитывать и наиболее крупные члены возмущений третьего порядка; крайне редко принимают во внимание некоторые члены возмущений четвертого порядка.

Следует отметить, что на практике метод Пикара обычно сводится к методу малого параметра *. Все написанные здесь формулы определяют возмущения *оскулирующих элементов:* они получаются из требования, что в начальный момент t_0 возмущения равны нулю. Если определенные интегралы заменить здесь неопределенными и во все формулы для возмущений добавить произвольные постоянные интегрирования, определяя их из требования, чтобы они равнялись нулю в начальный момент, то мы получим возмущения *средних элементов* орбиты. Эта терминология в астрономии общепринята; ее ввел еще в XIX веке Ганзен.

§ 14. Основные операции при интегрировании уравнений для оскулирующих элементов орбиты. Классификация возмущений

Подготовка уравнений (II.126) или (II.128) к интегрированию заключается в следующем. Пусть дана некоторая пертурбационная функция $R = R(x, y, z)$ (для определенности будем считать, что мы имеем дело с гравитационным возмущающим фактором).

Первый этап заключается в выражении функции R через элементы орбиты и представлении ее в виде тригонометрического ряда относительно средней аномалии и *угловых* переменных π (ω), Ω, ε (M_0). Коэффициенты ряда в этом случае являются функциями *позиционных* переменных a, e, i. Этот этап называется разложением пертурбационной функции.

Второй этап заключается в вычислении производных от R по элементам орбиты, подстановки их в уравнения (II.126) и представлении каждого из уравнений в форме ряда

$$\frac{dЭ_j}{dM} = \frac{1}{2} A_{j0}(a, e, i) + \sum_{k, k_1, k_2} \{A_{jk}(a,e,i) \cos [(k_1\omega_1 + k_2\omega_2) M + f_k(\Omega, \pi, \varepsilon)] + B_{jk}(a,e,i) \sin [(k_1\omega_1 + k_2\omega_2) M + f_k(\Omega, \pi, \varepsilon)]\}, \quad (II.141)$$

где ω_1 и ω_2 — некоторые вещественные числа, $j = 1, 2, ..., 6$, k, k_1, k_2 — целые числа **.

Полагая в первом приближении все элементы орбиты равными их начальным значениям и интегрируя (II.141), находим возмущения первого порядка:

$$\delta Э_{j1} = Э_j^{(1)} - Э_{j0} = \frac{1}{2} A_{j0}(M - M_0) + \sum_{k, k_1, k_2} \frac{1}{(k_1\omega_1 + k_2\omega_2)} \times$$

---

* В настоящее время широкое распространение получили так называемые методы осреднения. Их изложение можно найти, например, в первой части монографии [18].

** В общем случае множитель перед M может иметь вид $(k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + ... + k_n\omega_n)$.

$$\times \{A_{jk} \sin [(k_1\omega_1 + k_2\omega_2) M + f_k(\Omega, \pi, \varepsilon)] -$$
$$- B_{jk} \cos [(k_1\omega_1 + k_2\omega_2) M + f_k(\Omega, \pi, \varepsilon)]\}. \qquad \text{(II.142)}$$

Члены, пропорциональные $(M-M_0)$ и монотонно увеличивающиеся с течением времени, называются вековыми возмущениями первого порядка. Справедлива теорема Лапласа: при движении только под действием гравитационных сил вековых возмущений первого порядка в большой полуоси орбиты нет. Остальные члены в (II.142) называются периодическими возмущениями первого порядка. Если числа ω_1 и ω_2 таковы, что $|k_1\omega_1+k_2\omega_2| \geqslant 1$, то соответствующие члены в (II.142) называются короткопериодическими возмущениями. Амплитуды этих возмущений обычно малы. Если $|k_1\omega_1+k_2\omega_2| < 1$, то соответствующие члены называются долгопериодическими возмущениями. Амплитуды этих возмущений могут быть довольно значительны. И наконец, если $k_1\omega_1+k_2\omega_2 \to 0$, а теория чисел показывает, что в бесконечных рядах (II.142) при произвольных ω_1 и ω_2 всегда найдутся такие целые числа k_1 и k_2, что знаменатель $k_1\omega_1+k_2\omega_2$ будет существенно мал, то в данном случае мы будем иметь дело с резонансными возмущениями, имеющими существенно большие амплитуды и периоды.

Пусть теперь необходимо найти возмущения во втором приближении (или найти возмущения второго порядка). Для этого в уравнениях (II. 142) все элементы орбиты, входящие в коэффициенты A, B, f, следует заменить их возмущенными значениями, найденными из первого приближения, и интегрировать уравнения заново (либо использовать формулу (II.140). После интегрирования, кроме вековых возмущений первого порядка, мы получим вековые возмущения второго порядка — члены, пропорциональные $(M-M_0)^2$. Кроме дополнительных периодических членов появятся так называемые смешанные возмущения первого порядка — члены, пропорциональные

$$M \cos [(k_1\omega_1 + k_2\omega_2) M] \text{ и } M \sin [(k_1\omega_1 + k_2\omega_2) M].$$

Интегрируя в третьем приближении, получим, кроме периодических членов, вековые возмущения третьего порядка, пропорциональные $(M-M_0)^3$ и смешанные возмущения второго порядка, содержащие M^2, и так далее. Отметим, что вековых возмущений второго порядка в большой полуоси орбиты при движении в гравитационном поле также нет (теорема Пуассона).

Если нужно интегрировать уравнения Ньютона, то представив указанным образом составляющие возмущающего ускорения S, T, W, эти уравнения приводят к тому же виду (II.142). Следует, однако заметить, что если возмущающий фактор негравитационный, то и в большой полуоси орбиты могут появиться вековые возмущения первого порядка.

§ 15. Разложение пертурбационной функции, определяющей возмущающую часть геопотенциала

Запишем внешний геопотенциал в виде (§ 11):

$$U = \frac{\mu}{r} + R_{\oplus}, \qquad (II.143)$$

где пертурбационная функция $R_{\oplus}$ [57] представляется разложением по сферическим функциям:

$$R_{\oplus} = \mu \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) P_{nk} (\sin \varphi). \qquad (II.144)$$

Здесь: μ — гравитационный параметр Земли; r_0 — ее средний экваториальный радиус; r, φ, λ — геоцентрические радиус-вектор; широта (склонение) и долгота от Гринвича внешней точки (ИСЗ); $P_{n0}(\sin \varphi)$ — полиномы Лежандра; $P_{nk}(\sin \varphi)$ — присоединенные функции Лежандра; C_{nk}, S_{nk} — малые безразмерные параметры, характеризующие гравитационное поле Земли. В частности, C_{20} характеризует полярное сжатие Земли, C_{22}, S_{22} — несимметрию экватора, C_{30} — несимметрию северного и южного полушарий Земли. При этом $C_{20} \sim 10^{-3}$, C_{nk}, $S_{nk} \sim \leqslant \underset{n \geqslant 2}{\leqslant 10^{-6}}$.

Указанная форма записи геопотенциала рекомендована Международным астрономическим союзом; при $k=0$ часто полагают $C_{n0} = -J_n$*. Члены разложения (II. 144) при $k=0$ называют зональными гармониками, или зональной частью геопотенциала, характеризующей внешний гравитационный потенциал земного сфероида (потенциал эллипсоида характеризует лишь член с $n=2$ и $k=0$). Члены разложения при $k \neq 0$ называются долготными гармониками, причем при $0<k<n$ — тессеральными гармониками, при $k=n$ — секториальными гармониками. Долготные гармоники характеризуют отступление гравитационного потенциала реальной Земли от потенциала земного сфероида. Для разложения пертурбационной функции (II.144), т. е. для ее представления через элементы орбиты, понадобятся следующие соотношения [17]:

$$1)\ \cos^n \beta = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \exp \sqrt{-1}\,(n-2s)\beta \qquad (II.145)$$

---

* Обозначение J_n удобнее при интегрировании гамильтоновых уравнений движения ИСЗ методом вариации произвольных постоянных, которые не рассматриваются в данной книге.

— представление целой степени косинуса тригонометрическим полиномом. Аналогичная формула для $\sin^n\beta$ получается заменой в (II.145) β на $90° - \beta$;

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!\,(n-s)!} \tag{II.146}$$

— сочетания из n по s.

$$2)\ P_{nk}(\sin\varphi) = 2^k\left(\frac{1}{2}\right)_k \cos^k\varphi\cdot C_{n-k}^{k+\frac{1}{2}}(\sin\varphi) \tag{II.147}$$

— связь присоединенных функций Лежандра с полиномами Гегенбауэра $C_{n-k}^{k+\frac{1}{2}}(\sin\varphi)$, определяемыми как коэффициенты разложения производящей функции

$$(1+\alpha^2-2\alpha\sin\varphi)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n C_n^{\nu}(\sin\varphi), \quad |\alpha|<1, \tag{II.148}$$

где ν — любое вещественное неотрицательное число (при $\nu = \frac{1}{2}$ имеем полиномы Лежандра); $\left(\frac{1}{2}\right)_к = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)$.

$$3)\ C_n^{\nu}(\sin\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{m=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{(-1)^m 2^{n-2m}\Gamma(\nu+n-m)}{m!\,(n-2m)!}\sin\varphi^{n-2m} \tag{II.149}$$

— явное выражение полиномов Гегенбауэра; $\Gamma(x)$ — гамма-функция; здесь будут встречаться выражения, когда $x=n>0$ (n — целое) и $x=n+\frac{1}{2}$. Тогда

$$\Gamma(n) = (n-1)!;\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(2n-1)!}{2^{2n-1}\cdot n!},\ \pi = 3{,}14\ \ldots, \tag{II.150}$$

$E\left(\frac{n}{2}\right)$ означает, что суммирование ведется до наибольшего целого, содержащегося в $\frac{n}{2}$.

Введем вместо аргумента широты u истинную долготу в орбите w:

$$w = \Omega + u. \tag{II.151}$$

Тогда формулы (II.55) можно представить так:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{r} &= \cos w + 2\sin\Omega\sin(w-\Omega)\sin^2\frac{i}{2} = \cos\varphi\cos(\lambda+S)\\ \frac{y}{r} &= \sin w - 2\cos\Omega\sin(w-\Omega)\sin^2\frac{i}{2} = \cos\varphi\sin(\lambda+S)\\ \frac{z}{r} &= \sin i\sin(w-\Omega) = \sin\varphi\end{aligned}\right\}, \qquad (II.152)$$

где

$$S = \nu(t-t_0) \qquad (II.153)$$

— гринвичское звездное время в момент t (t_0 — начальный момент), ν — угловая скорость вращения Земли. Используя формулу (II.152) и формулу бинома, можно написать:

$$\cos^k\varphi\exp\sqrt{-1}\,k\lambda = \exp\sqrt{-1}\,[-k\nu(t-t_0)]\cdot\Big[\exp\sqrt{-1}\,w +$$

$$+ 2\sin^2\frac{i}{2}\sin\cdot(w-\Omega)\exp\sqrt{-1}\,(\Omega-90^\circ)\Big]^k =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} 2^m\binom{k}{m}\sin^{2m}\frac{i}{2}\sin^m(w-\Omega)\exp\sqrt{-1}\times[(k-m)w +$$

$$+ m\Omega - k\nu(t-t_0) - m\,90^\circ]. \qquad (II.154)$$

Найдем величину $\exp\sqrt{-1}\,k\lambda\cdot P_{nk}(\sin\varphi)$, для чего преобразуем ее, применяя последовательно формулы (II.147), (II.149) и (II.154) и выражая целую степень $\sin\,(w-\Omega)$ при помощи (II.145):

$$\exp\sqrt{-1}\,k\lambda P_{nk}(\sin\varphi) = \frac{2^k\left(\frac{1}{2}\right)_k}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\sum_{m=0}^{k}\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n-k}{2}\right)}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{n-k+m-2s}(-1)^s\frac{\Gamma\left(n-s+\frac{1}{2}\right)}{s!\,(n-k-2s)!}\binom{k}{m}\binom{n-k+m-2s}{l}\times$$

$$\times\sin^{2m}\frac{i}{2}\sin^{n-k-2s}i\cdot\exp\sqrt{-1}\,[(n-k-2s-2l)\,90^\circ-(n-2k+$$

$$+2m-2s-2l)\,w - k\nu(t-t_0) + (n-k+2m-2s-2l)\,\Omega]. \qquad (II.155)$$

Разделяя в (II.155) действительную и мнимую части и подставляя их в (II.144), а также используя разложение (II.77) и помня, что

$$w = \pi + v,\ t - t_0 = \frac{1}{\tilde{n}}(M - M_0) = \frac{1}{\tilde{n}}(M - \varepsilon + \pi),$$

где $\tilde{n}$* — среднее движение, окончательно получим:

$$R_{\oplus} = \mu \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k \left(\frac{1}{2}\right)_k}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{r_0^n}{a^{n+1}} \sum_{m=0}^{k} \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n-k}{2}\right)} \sum_{l=0}^{n-k+m-2s} \times$$

$$\times \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{nk}^{msl}(i) X_j^{-n-1,\ -(n-2k+2m-2s-2l)}(e) \cdot \left\{ C_{nk} \cos\left[\frac{(j\tilde{n} - k\nu)}{\tilde{n}} M + \right.\right.$$

$$\left.\left. + f_{nkm}^{sl}\right] + S_{nk} \sin\left[\frac{(j\tilde{n} - k\nu)}{\tilde{n}} M + f_{nkm}^{sl}\right]\right\}, \qquad (II.156)$$

где

$$A_{nk}^{msl}(i) = (-1)^s \frac{\Gamma\left(n - s + \frac{1}{2}\right)}{s!\,(n-k-2s)!} \binom{k}{m} \binom{n-k+m-2s}{l} \times$$

$$\times \sin^{2m} \frac{i}{2} \cdot \sin^{n-k-2s} i; \qquad (II.157)$$

$$f_{nkm}^{sl} = \left[(n - k + 2m - 2s - 2l)\,\Omega - \left(n - \frac{2\tilde{n} - \nu}{\tilde{n}} k + 2m - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2s - 2l\right)\pi + k\frac{v}{\tilde{n}}\varepsilon + (n - k - 2s - 2l)\,90^\circ\right]; \qquad (II.158)$$

$X_j(e)^{-n-1,\ -(n-2k+2m-2s-2l)}$ — коэффициенты Ганзена.

Таким образом, искомое разложение является тригонометрическим относительно угловых переменных, позиционные же переменные входят в коэффициенты разложения (см. § 14).

Если вместо истинной долготы в орбите использовать аргумент широты (формулы II.55), то разложение $R_{\oplus}$ вместо шестикратного суммирования будет содержать семикратное суммирование, как у Каула [30], и будет излишне сложным.

---

* Здесь и дальше среднее движение будем обозначать через $\tilde{n}$, так как буква n является первым стандартным индексом в разложении геопотенциала.

§ 16. Возмущения в движении ИСЗ от зональной части геопотенциала

Положим, в (II.156) $k=0$; в этом случае также и $m=0$. Тогда вместо (II.157) и (II.158) будем иметь

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} A_{n,0}^{0,s,l}(i) = (-1)^s \frac{\Gamma\left(n-s+\frac{1}{2}\right)}{s!\,(n-2s)!}\binom{n-2s}{l}\sin^{n-2s} i; \tag{II.150}$$

$$f_{n00}^{sl} = (n-2s-2l)(\Omega-\pi+90^\circ) = (n-2s-2l)(90^\circ-\omega),$$

где на основании (II.150)

$$\frac{\Gamma\left(n-s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{(2n-2s-1)!}{2^{2n-2s-1}(n-s-1)!}.$$

Учитывая также, что при $k=0$ $S_{nk}\sin k\lambda=0$, получаем общее разложение для пертурбационной функции от зональной части геопотенциала

$$R_{\oplus\varphi} = -\mu\sum_{n=2}^{\infty} J_n \frac{r_0^n}{a^{n+1}} \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{l=0}^{n-2s} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \times$$

$$\times \frac{(-1)^s (2n-2s-1)!\sin^{n-2s} i}{2^{2n-2s-1}s!\,l!\,(n-s-1)!\,(n-2s-l)!} \cdot X_j^{-n-1,\,-n+2s+2l}(e)\,\times$$

$$\times \cos\left[jM + (n-2s-2l)(90^\circ-\omega)\right], \tag{II.160}$$

где положено

$$J_n = -C_{n0}. \tag{II.161}$$

В соответствии с § 13 и 14 алгоритм получения формул для возмущений первого порядка представляет собой следующее.

П е р в ы й э т а п: получение производных от пертурбационной функции по элементам орбиты.

1) $\dfrac{\partial R_{\oplus\varphi}}{\partial\Omega} = 0$, так как зональная часть геопотенциала от долготы узла не зависит;

2) $\dfrac{\partial R_{\oplus\varphi}}{\partial i}$ — вводим в выражение для $R_{\oplus\varphi}$ множитель $(n-2s)\cos i$, а $\sin^{n-2s} i$ заменяем на $\sin^{n-2s-1} i$;

3) $\frac{\partial R_{\oplus\varphi}}{\partial\omega}$ — вводим в выражение для $R_{\oplus\varphi}$ делитель $(n-2s-2l)$, а $\cos[jM+(n-2s-2l)(90°-\omega)]$ заменяем на $\sin[jM+(n-2s-2l)(90°-\omega)]$;

4) $\frac{\partial R_{\oplus\varphi}}{\partial a} = -\frac{(n+1)}{a}R_{\oplus\varphi}$,

5) $\frac{\partial R_{\oplus\varphi}}{\partial e}$ — заменяем в $R_{\oplus\varphi}$ коэффициенты Ганзена их производными по эксцентриситету орбиты. Эти производные выражаются через сами коэффициенты Ганзена по формуле [11, 12]:

$$\frac{dX_j^{pq}(e)}{de} = \frac{1}{2}(q-p)X_j^{p-1,\,q+1}(e) - \frac{1}{2}(q+p)X_j^{p-1,\,q-1}(e) + \frac{q}{2(1-e^2)}\left[X_j^{p,\,q+1}(e) - X_j^{p,\,q-1}(e)\right], \tag{II.162}$$

где $p=-n-1$, $q=-n-2s-2l$; производная (II.162) имеет порядок $e^{|\,|q-j|-1\,|}$;

6) $\frac{\partial R_{\oplus\varphi}}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial R_{\oplus\varphi}}{\partial M_0} = \frac{\partial R_{\oplus\varphi}}{\partial M}$ — вводим в выражение для $R_{\oplus\varphi}$ делитель j, а $\cos(jM+\ldots)$ заменяем на $-\sin(jM+\ldots)$.

Второй этап. Подставляем найденные производные в уравнения Лагранжа (2.126), причем $\frac{\partial R}{\partial\pi}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial R}{\partial\omega}$; отсюда найдем $\frac{\partial R}{\partial\pi}$. Соответствующие уравнения системы (II.126) можно заменить на те или иные уравнения (II.133) и (II.134).

Третий этап. Приводя подобные члены относительно одинаковых кратностей средней аномалии M и поделив правые части на среднее движение, представляем систему (II.126) в форме (II.141). При этом $k_2=\omega_2=0$; $\omega_1=1$.

Четвертый этап. Считая элементы орбиты постоянными, равными их начальным значениям, интегрируем полученные уравнения в пределах от начального значения M_0 до текущего M. После интегрирования получим:

1) вековые члены вида $\frac{1}{2}A_{j0}(a, e, i)\cdot(M-M_0)$ (формула (II.142), получающиеся при $j=0$ и $n-2s-2l=0$), присутствуют в долготе узла Ω, долготе перицентра от узла ω (а значит и в π) и в начальной эпохе ε (или в начальном значении M_0).

2) Если $j=0$, но $n-2s-2l\neq 0$, то с формальной точки зрения такие члены, зависящие от $\sin\omega$ и $\cos\omega$, тоже можно рассматривать как вековые. Практически удобнее их представить как долгопериодические: в уравнениях Лагранжа еще до интегрирования долготу перицентра ω следует заменить на $\omega+\delta\dot{\omega}t$, где

$\dot{\omega}t$ — вековые возмущения, а затем уже уравнения проинтегрировать. Тогда все члены, содержащие делитель $\dot{\omega}$, будут долгопериодическими.

3) При $j \neq 0$ и $n-2s-2l \neq 0$ все члены являются периодическими функциями M, причем модули кратностей M больше единицы. Такие члены являются короткопериодическими. Большая полуось орбиты содержит лишь одни короткопериодические возмущения. Действительно, уравнение da/dM содержит лишь производную $\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial R}{\partial M_0} = \frac{\partial R}{\partial M}$, так что интегрирование по M правой части этого уравнения не меняет, добавляя лишь постоянную интегрирования. Тем самым в возмущении δ_a члены, пропорциональные M, отсутствуют, что соответствует теореме Лапласа. Наиболее крупные возмущения в орбите ИСЗ вызывает параметр J_2, характеризующий полярное сжатие Земли α, с которым он связан формулой [54]

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[3J_2 + \frac{\nu^2 r_0^3}{\mu}(1-\alpha)\right]\left[1 + \frac{3}{4}J_2 + \frac{3}{8}\frac{\nu^2 r_0^3}{\mu}(1-\alpha)\right]. \quad (II.163)$$

Если положить в (II.160) $n=2$, то пертурбационная функция для J_2 принимает вид:

$$R_{\oplus\varphi 2} = -\frac{1}{2}\mu J_2 \frac{r_0^2}{a^3} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\{\left(\frac{3}{2}\sin^2 i - 1\right) X_j^{-3,0}(e) \cos jM + \right.$$
$$+ \frac{3}{4}\sin^2 i \,[X_j^{-3,-2}(e)\cos(jM + 2(90^\circ - \omega)) +$$
$$\left. + X_j^{-3,+2}(e)\cos(jM - 2(90^\circ - \omega))]\right\}. \quad (II.164)$$

Формулы для возмущений первого порядка получаются рассмотренным выше способом. Первые члены в фигурных скобках при $j=0$ дают вековые возмущения в долготе узла, долготе перицентра и начальной эпохе. Члены в квадратных скобках при $j=0$ дают долгопериодические возмущения; все члены при $j \neq 0$ дают короткопериодические возмущения. Приведем лишь формулы для вековых возмущений первого порядка от J_2, ибо они определяют общую эволюцию орбиты ИСЗ. Эти формулы имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \delta\overline{\Omega} &= -\frac{3}{2}J_2\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2}(M - M_0) \\ \delta\overline{\omega} &= \frac{3}{4}J_2\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \frac{(5\cos^2 i - 1)}{(1-e^2)^2}(M - M_0) \\ \delta\overline{M_0} &= \frac{3}{4}J_2\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 \frac{(3\cos^2 i - 1)}{(1-e^2)^{3/2}}(M - M_0) \end{aligned}\right\}, \quad (II.165)$$

где

$$\delta\bar{\omega} = \delta\bar{\pi} - \delta\Omega; \quad \delta\bar{M}_0 = \delta\bar{\varepsilon} - \delta\bar{\pi}.$$

Параметр $J_2 = -C_{20} = 1{,}082639 \cdot 10^{-3}$ [54] (Козаи). Из формул (II.165) следует, что: 1) линия узлов движется в направлении, обратном направлению орбитального движения; $\max\delta\bar{\Omega}$ — при $i=0°$; $\delta\bar{\Omega}=0$, если $i=90°$; 2) линия апсид движется в прямом направлении, если $0°<i<63{,}4°$, и в обратном при $63{,}4°<i<<90°$; при $i=63{,}7°$ $\delta\bar{\omega}=0$; 3) движение $\bar{M}_0$ прямое, если $0°<i<54{,}7°$, и обратное, если $54{,}7°<i<90°$; при $i=54{,}7°$ $\delta\bar{M}_0=0$. Пусть высота ИСЗ над поверхностью Земли ~ 1000 км, орбита близка к круговой ($e<0{,}01$) и наклон орбиты $i\sim 65°$. Тогда числовые значения вековых возмущений от J_2 будут такими: $\delta\bar{\Omega}\sim -2{,}7°$ в сутки, $\delta\bar{\omega}\sim -0{,}5°$ в сутки и $\delta\bar{M}_0\sim -4{,}8°$ в сутки. Наибольшая амплитуда периодических возмущений в большой полуоси составит величину порядка 7 км; периодические возмущения в эксцентриситете приведут к колебаниям высоты перицентра порядка 4 км.

Параметры J_n при $n>2$ имеют порядок $|J_n| \sim \leqslant |J_2|^2$. Например, если J_2 имеет порядок 10^{-3}, то J_3, J_4, J_6 имеют порядок 10^{-6}, остальные гармоники вплоть до $n=20$ имеют порядок 10^{-7}, причем J_9, J_{12} и $J_{19}\sim 10^{-8}$. Зональные гармоники при $n>2$ вызывают возмущения в угловых элементах орбиты порядка секунд и десятков секунд дуги за оборот, что вполне выявляется современными фотографическими наблюдениями ИСЗ. Поэтому, если при $n>2$ ограничиваться возмущениями первого порядка, то для J_2, кроме возмущений первого порядка, следует учитывать и возмущения второго порядка, причем J_2 нужно рассматривать как малый параметр. Эти возмущения могут быть получены на основании формул вида (II.140), где $\sigma = J_2$, f_j — правые части уравнений Лагранжа, $\sigma\delta Э_{k1}$ — возмущения первого порядка, $Э_k$ — элементы орбиты.

Из формул (II.137)—(II.140) следует, что в тех случаях, когда долгота перицентра от узла ω заменяется его возмущенным значением $\frac{\sin}{\cos}(\omega+\delta\bar{\omega})$, где $\delta\bar{\omega}$ определяется второй формулой (II.155), то после интегрирования величина $5\cos^2 i - 1$ окажется в знаменателе и при $i=63{,}4°$ будет происходить деление на ноль. Если вместо $\delta\bar{\omega} = \dot{\bar{\omega}} t$ употребляются полные значения возмущений первого порядка, то в указанном случае будет происходить деление на малую величину. В связи с этим значение $i=63{,}4°$ называют критическим наклоном. Долгопериодические возмущения также содержат критический наклон. Вероятность того, что у наблюдаемого ИСЗ наклон орбиты окажется в точности равным критическому, крайне мала. Поэтому неудобства вычислительного характера, связанные с критическим наклоном, достаточно иллюзорны. В случае необходимости от критического наклона можно избавиться специальными аналитическими приемами [18], рассмотрение которых не входит в задачу этой книги. Если необходимо избавиться от неудобств, связанных с особенностями при $e=0$ и $i=0°$, нужно вместо обычных элементов использовать элементы, определяемые формулами соответственно (II.131) и (II.132).

§ 17. Возмущения в движении ИСЗ от долготной части геопотенциала

Эти возмущения определяются пертурбационной функцией (II.156) при $k \neq 0$. Порядок вывода формул для возмущений первого порядка тот же, что и в предыдущем параграфе: сначала находим производные от пертурбационной функции по элементам орбиты, подставляем найденные производные в уравнения Лагранжа, преобразуем правые части уравнений к тригонометрической форме (II.141) и, интегрируя уравнения в пределах от M_0 до M при постоянных элементах орбиты, получаем искомые формулы в форме (II.142). В этом случае

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = j - k\frac{\nu}{\tilde{n}}, \qquad \text{(II.166)}$$

откуда

$$k_1 = j, \quad k_2 = -k, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \frac{\nu}{\tilde{n}}. \qquad \text{(II.167)}$$

Так как отношение угловой скорости вращения Земли ν к среднему движению ИСЗ $\tilde{n}$ в общем случае число нецелое, то все члены разложения вида (II.141) являются периодическими функциями средней аномалии M. Таким образом, вековые члены вида $\frac{1}{2} A_{j0}(M-M_0)$ — формула (II.141) — в возмущениях от долготной части геопотенциала отсутствуют.

Как следует из § 15, при $j\tilde{n}-k\nu \to 0$ * будем иметь долгопериодические возмущения, переходящие в пределе при $j\tilde{n}-k\nu=0$ в *резонансные*. Все остальные возмущения — короткопериодические. Для космической геодезии наибольший интерес представляют долгопериодические и резонансные возмущения (см. гл. VI). Объединяя их для удобства одним условием $j\tilde{n}-k\nu=0$, приходим к выводу, что эти возмущения имеют место, когда отношение $\frac{\nu}{\tilde{n}}$ представляет собой несократимую дробь, т. е. ν и $\tilde{n}$ являются взаимно простыми целыми числами. В этом случае отношение периода обращения ИСЗ к периоду обращения Земли вокруг оси $T/T_{\oplus}$ также будет несократимой дробью;

---

* Уточнение условия резонанса см. § 4 гл. VI.

в частности, период обращения ИСЗ T может целое число раз укладываться в звездных сутках. Резонансные возмущения наиболее существенны вдоль орбиты (по зарубежной терминологии — «ошибка вдоль следа»):

$$\delta L = a(1 - e^2)[\delta\Omega(\cos i - 1) + \delta\varepsilon], \tag{II.168}$$

где $\delta\Omega$ и $\delta\varepsilon$ — возмущения первого порядка в долготе узла и начальной эпохе. Не следует думать, что при строгом выполнении условий резонанса возмущения становятся бесконечно большими и спутник тем самым может либо улететь прочь от Земли, либо упасть на ее поверхность. Дело в том, что в данном случае мы рассматривали лишь возмущения первого порядка, а совокупность возмущений всех последующих порядков может «уничтожить» строгое соблюдение резонансных условий. Это может быть исследовано при помощи современных качественных методов небесной механики [18]. Однако малые делители (см. § 14) в формулах для возмущений присутствовать будут. Рассмотрим пример. Как и в предыдущем параграфе, возьмем почти круговую орбиту ИСЗ с высотой над поверхностью Земли порядка 1000 км. Большая полуось орбиты тогда равна $a = 7378$ км, период обращения ИСЗ $T \approx 1{,}755^h$ (формула II.30), среднее движение ИСЗ $\tilde{n} \approx 0{,}955 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\text{сек}}$ [формула (II.31)].

Для Земли: $T_{\oplus} \approx 23{,}934^h$ — звездные сутки; $\nu = 7{,}31958 \times \times 10^{-5} \frac{1}{\text{сек}}$ — угловая скорость вращения. Тогда $\nu/\tilde{n} = T/T_{\oplus} = = 0{,}0735$.

Положим $|j| = 1$ и из условия резонанса найдем, что наименьший делитель $|j|\tilde{n} - k\nu$ для $|j| = 1$ будут давать долготные гармоники с индексом $k = 13$:

$$|\, j\,|\,\tilde{n} - k\nu \approx 0{,}003.$$

Таким образом, в указанной орбите гармоники при $k = 13$ будут давать возмущения с амплитудой и периодом примерно в триста раз большими амплитуд и периодов возмущений от других гармоник. Если положить $|j| = 2$, то аналогичным образом найдем, что наименьший делитель будут давать долготные гармоники с индексом $k = 26$: $|j|\tilde{n} - k\nu \approx 0{,}007$ (величины коэффициентов гармоник с таким индексом пока неизвестны). Полагая $|j| = 3$, 4 и т. д. можно найти другие малые делители для заданной орбиты.

Обратная задача: пусть $|j| = 1$; какова должна быть большая полуось орбиты, чтобы гармоники с индексом, например, $k = 2$ давали резонансные возмущения? Из условия резонанса находим среднее движение ИСЗ: $\tilde{n} \approx 1{,}464 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{сек}}$; затем из формулы (II.31) находим большую полуось: $a \approx 26500$ км. Если $|j|=2$, то получаем $\tilde{n}=\nu$ и $a \sim 42500$ км — это радиус орбиты так называемого 24-часового спутника; если у такого ИСЗ наклон орбиты $i=0°$, то этот спутник называют стационарным (он как бы «висит» над одной и той же экваториальной областью Земли). В орбите 24-часового спутника все долготные гармоники вызывают резонансные возмущения, ибо для любого $|j|$ всегда найдется равное ему значение индекса k, так что будет соблюдено равенство $\tilde{n} \approx \nu$.

Так как величины коэффициентов долготных гармоник имеют тот же порядок, что и величины зональных коэффициентов при $n<2$, то амплитуды короткопериодических возмущений имеют тот же порядок, что и амплитуды короткопериодических возмущений от зональных гармоник.

§ 18. Лунно-солнечные возмущения в движении ИСЗ

Пертурбационная функция в данном случае определяется формулой (II.120)

$$R = \mu_1\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3}\right) = \mu_1\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r_1^2}\cos\psi\right).$$

Величины с индексом 1 относятся либо к Луне, либо к Солнцу, без индекса — к ИСЗ; μ_1 — гравитационный параметр Луны либо Солнца, ψ — угол при центре Земли между радиусом-вектором ИСЗ r и радиусом-вектором возмущающего тела r_1, Δ — взаимное расстояние между ИСЗ и возмущающим телом (см. рис. 13). Разложение пертурбационной функции производится в такой последовательности. Поскольку $r<r_1$, то величина, обратная взаимному расстоянию, разлагается в ряд по полиномам Лежандра:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r_1\sqrt{1+\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{r_1}\right)\cos\psi}} =$$

$$= \frac{1}{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos\psi), \quad \text{для } \left|\frac{r}{r_1}\right| < 1. \qquad \text{(II.169)}$$

Подставляя (II.169) в (II.120), учитывая, что $\cos\psi = P_1(\cos\psi)$, находим

$$R = \frac{\mu_1}{r_1}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos\psi), \qquad \text{(II.170)}$$

где член с индексом $n=0$ отброшен, ибо от координат ИСЗ он не зависит и исчезает при подстановке R в уравнения Лагранжа. Затем нужно найти выражение $\cos\psi$ через элементы орбиты ИСЗ и возмущающего тела. Из (II.120) следует

$$\cos\psi = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{rr_1}. \tag{II.171}$$

Подставляя сюда вместо $\frac{x}{r}$, $\frac{x_1}{r_1}$; $\frac{y}{r}$, $\frac{y_1}{r_1}$; $\frac{z}{r}$, $\frac{z_1}{r_1}$ их выражения, согласно формулам (II.55), после преобразований найдем:

$$\cos\psi = \frac{1}{2}\sin i \sin i_1 \cos(u - u_1) - \frac{1}{2}\sin i \sin i_1 \cos(u + u_1) +$$
$$+ \cos^2\frac{i}{2}\cos^2\frac{i_1}{2}\cos(u - u_1 + \Omega - \Omega_1) + \sin^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{i_1}{2}\cos(u - u_1 -$$
$$- \Omega + \Omega_1) + \cos^2\frac{i}{2}\sin^2\frac{i_1}{2}\cos(u + u_1 + \Omega - \Omega_1) +$$
$$+ \sin^2\frac{i}{2}\cos^2\frac{i_1}{2}\cos(u + u_1 - \Omega + \Omega_1), \tag{II.172}$$

где индексом 1 опять-таки снабжены элементы орбиты возмущающего тела.

В качестве малого параметра в рассматриваемом случае можно, например, принять величину $\mu_1\left(\frac{a}{a_1}\right)^2$. Так как $\mu_☾ \sim 1{,}23\cdot 10^{-2}$, $\mu_\odot \sim 3{,}3\cdot 10^{+5}$ (в единицах гравитационного параметра Земли), $a_☾ \sim 4\cdot 10^5$ км, $a_\odot \sim 1{,}5\cdot 10^8$ км, то приняв в среднем $a_{\text{ИСЗ}} \sim 10^4$ км, получим: $\mu_☾\left(\frac{a}{a_☾}\right)^2 \sim 10^{-6}$, $\mu_\odot\left(\frac{a}{a_\odot}\right)^2 \sim 10^{-3}$; $\mu_☾\left(\frac{a}{a_☾}\right)^3 \sim 10^{-7}$, $\mu_\odot\left(\frac{a}{a_\odot}\right)^3 \sim 10^{-7}$. Отсюда следует, что так как $J_2 \sim 10^{-3}$, а $|C_{nk}|$, $|S_{nk}|$, $k=0, 1, 2, \ldots \sim |J_2|^2 \sim 10^{-6} \div 10^{-7}$, то при учете возмущений первого и второго порядка от зональной гармоники J_2 и возмущений первого порядка от последующих зональных и долготных гармоник в разложении (II.170) нужно сохранить четыре члена, если учитываются возмущения от Луны и два члена при учете возмущений от Солнца *.

Тогда, чтобы получить рабочее выражение для пертурбационной функции, в разложении (II.170) следует положить $2 \leqslant n \leqslant 5$. Кроме того, в коэффициентах Ганзена достаточно взять первые члены, если орбита ИСЗ не слишком вытянута. Тогда разложение (II.170) существенно упростится. Вывод

* При большей точности учета возмущений от геопотенциала в разложении (II. 170) нужно сохранять большее число членов и учитывать совместные действия на ИСЗ гармоник геопотенциала, Луны, Солнца.

возмущений первого порядка выполняется стандартным методом: ищутся производные от R по элементам орбиты и подставляются в уравнения Лагранжа, правые части которых приводятся к виду (II.141). Интегрирование дает возмущения первого порядка в форме (II.142). Большая полуось орбиты содержит короткопериодические возмущения; остальные элементы орбиты содержат, кроме короткопериодических возмущений, долгопериодические возмущения с периодом равным периоду обращения возмущающего тела; долгота узла Ω, долгота перицентра π и начальная эпоха ε содержат также и вековые возмущения.

Приведем наиболее крупные вековые члены в долготе узла Ω, долготе перицентра от узла $\omega=\pi-\Omega$ и начальном значении средней аномалии $M_0=\varepsilon-\pi$, не зависящие от эксцентриситета и наклона возмущающего тела:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\delta\Omega} &\sim -\frac{3}{4}\frac{\mu_1}{\mu}\left(\frac{a}{a_1}\right)^3 \cos i\,(M-M_0)+\ \ldots\\
\delta\overline{\omega} &\sim \frac{3}{8}\frac{\mu_1}{\mu}\left(\frac{a}{a_1}\right)^3 [(5\cos 2\omega-1)+5\,(1-\cos 2\omega)\cos^2 i]\,\times\\
&\quad\times (M-M_0)+\ \ldots\\
\delta\overline{M}_0 &\sim -\frac{1}{8}\frac{\mu_1}{\mu}\left(\frac{a}{a_1}\right)^3 \left[\frac{7}{8}(3\cos^2 i-1)+\right.\\
&\quad\left.+\frac{15}{8}\cos 2\omega\sin^2 i\right]\cdot(M-M_0)+\ \ldots
\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.173)}$$

Для ИСЗ с высотой порядка 1000 км за интервал $\sim 27^d$, равный периоду обращения Луны, изменение долготы узла составит величину порядка $5''$, а изменение долготы перицентра и начальной эпохи — порядка $10''$. С увеличением высоты ИСЗ возмущения растут, ибо растет отношение $\left(\frac{a}{a_1}\right)$. Так, для ИСЗ с большой полуосью порядка 42 000 км (24-часовой спутник) за тот же промежуток времени изменения указанных элементов будут порядка $10'$ и $20'$ соответственно.

Многими авторами выводились различные системы формул для учета лунно-солнечных возмущений с той или иной степенью приближения. Для практических вычислений пока целесообразно использовать формулы, данные в [60].

§ 19. Возмущения в движении ИСЗ под действием атмосферного торможения

В качестве исходной системы уравнений возмущенного движения в данном случае нужно применять уравнения Ньютона. Из аэродинамики известно, что сила сопротивления среды, действующая на движущееся в этой среде тело, равна:

$$F=\frac{1}{2}\rho V^2\overline{S}\cdot C_D\,, \qquad \text{(II.174)}$$

где V — скорость движения тела относительно среды, $\bar{S}$ — площадь поперечного сечения тела, ρ — плотность среды, C_D — аэродинамический коэффициент. При средней длине пробега молекул, большей геометрических размеров тела, можно положить

$$C_D = 2 \div 2{,}2 \tag{II.175}$$

(на высоте больше 160 км средняя длина пробега превышает 50 м, а размеры любого ИСЗ пока гораздо меньше этой величины).

Средняя плотность верхних слоев атмосферы чаще всего представляется формулой

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right), \tag{II.176}$$

где ρ_0 — плотность на высоте перицентра орбиты ИСЗ, h — высота, отсчитываемая от уровня перицентра, $H = H(h)$ — шкала высот — величина, меняющаяся весьма сложным образом и очень трудно предсказуемая с достаточной точностью. Приближенно можно считать [53]: на высоте над поверхностью Земли порядка 200 км $H \sim 35$ км, $\rho_0 \sim 10^{-13}$ г/см^3; на высоте порядка 700 км — $H \sim 90$ км, $\rho_0 \sim 10^{-16}$—10^{-17} г/см^3. В настоящее время известно [53], что плотность верхней атмосферы с течением времени меняется по очень сложным и до конца не изученным законам. Известны следующие периодические эффекты, характеризующие изменение плотности: суточный, 27-суточный, 11-летний, полугодовой и нерегулярные колебания. Для указанных пределов высот плотность может изменяться в несколько раз, причем чем больше высота, тем сильнее изменения. Поэтому формула (II.176) является приближенной и характеризует собой некоторую «среднюю» атмосферу. По этой причине сколь бы совершенна ни была небесно-механическая теория, с должной точностью учесть влияние атмосферы пока не удается. Тем самым параметры верхней атмосферы следует определять из спутниковых экспериментов одновременно с получением другой информации. Поэтому, если некоторый ИСЗ специально предназначен для получения геодезической информации, его целесообразно выносить либо за пределы атмосферы, либо на такую высоту (>1000 км), где влияние атмосферы незначительно и его легко учесть (или определить экспериментально).

Рассмотрим наиболее характерный случай, когда орбита ИСЗ имеет малый эксцентриситет. Тогда в первом приближении можно считать, что сила атмосферного сопротивления F направлена в сторону, противоположную направлению трансверсали T, и возмущающие ускорения на основании (II.174) и (II.175) будут равны

$$S = 0, \quad T = -\bar{\sigma}\rho_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right) V^2, \quad W = 0, \qquad \text{(II.177)}$$

где $\sigma = \bar{S}/m$ — отношение $\frac{\text{поверхность спутника}}{\text{масса спутника}}$, принимаемое за малый параметр. На основании (II.177) и (II.128) можно заключить, что в первом приближении атмосферные возмущения в долготе узла и наклоне орбиты отсутствуют. Остальные уравнения системы (II.128) примут вид

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{r}\sqrt{\frac{P}{\mu}}\,T; \quad \frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{P}{\mu}}\,(\cos v + \cos E)\,T;$$
$$\frac{d\pi}{dt} = \sqrt{\frac{P}{\mu}}\,\frac{\sin v}{e}\left(1 + \frac{r}{P}\right)T; \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \qquad \text{(II.178)}$$
$$= \sqrt{\frac{P}{\mu}}\,\frac{e \sin v}{1 + \sqrt{1 - e^2}}\left(1 + \frac{r}{P}\right)T.$$

Чтобы получить формулы для возмущений и установить эволюцию орбиты, достаточно (II.177) выразить через элементы орбиты, подставить в (II.178) и проинтегрировать уравнения (II.178) в форме (II.142). Высоту над уровнем перицентра h можно представить формулой

$$h = r - a(1 - e), \qquad \text{(II.179)}$$

где r — геоцентрический радиус-вектор ИСЗ. Квадрат орбитальной скорости V^2 выражается при помощи интеграла энергии. Подставляя эти величины в (II.177) и разлагая экспоненту в ряд по степеням h/H, получим

$$T = -\bar{\sigma}\rho_0\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,H^n}[r - a(1 - e)]^n. \qquad \text{(II.180)}$$

Это разложение абсолютно сходится при любых вещественных значениях отношения h/H. Представив при помощи (II.77) геоцентрический радиус-вектор r через среднюю аномалию и коэффициенты Ганзена, можно получить общее разложение T.

Считая эксцентриситет орбиты e весьма малым, сохраним в (II.180) лишь первый и второй члены и разложим r по степеням e, сохранив лишь члены первой степени относительно e. Получим

$$T = -\bar{\sigma}\rho_0\mu\left(\frac{1 - 2e}{H} + \frac{1}{a}\right) - \bar{\sigma}\rho_0\mu\frac{2e}{a}\cos M + \ldots \qquad \text{(II.181)}$$

Первый член в (II.181) дает вековые возмущения первого порядка. Обращаясь к уравнениям Ньютона в форме (II.178) и замечая, что

$$(\cos v - \cos E) = -\frac{3}{2}e + 2\cos M + \frac{3}{2}e\cos 2M + \ldots,$$

устанавливаем, что вековые возмущения первого порядка вследствие атмосферного торможения имеют большая полуось орбиты и ее эксцентриситет, причем оба эти элемента уменьшаются с течением времени. Чтобы уточнить первое приближение, следует поступить так: для получения радиальной составляющей S во вторую формулу (II.177) вместо V^2 подставляем квадрат радиальной скорости $V_r^2 = \frac{\mu}{p} e^2\sin^2 v$, для получения T — точное значение квадрата трансверсальной скорости $V_T^2 = \frac{\mu}{p}(1+e\cos v)^2$, так что только $W=0$. Необходимо также учесть влияние атмосферного торможения на движения линии узлов, линии апсид и начальной эпохи. Для этого в продифференцированных по M формулах (II.165) большую полуось a и эксцентриситет e следует заменить их возмущенными (с учетом лишь вековых членов) значениями. Тогда члены, пропорциональные $(M-M_0)^2$ или $(t-t_0)^2$, будут учитывать атмосферный эффект. В начальной эпохе основной вековой член будет давать вековое возмущение среднего движения, ибо среднее движение зависит от большой полуоси. Как следствие этого, вековое возмущение имеет средняя аномалия. Для обычного ИСЗ с высотой порядка 300 км имеем

$$\delta\bar{a} \sim -2{,}3 \text{ км/сутки}, \quad \delta\bar{e} \sim -0{,}0003t; \quad (t \text{ — в сутках});$$

амплитуда наиболее крупного периодического члена в большой полуоси составляет величину порядка 50 м. С увеличением высоты величины возмущений уменьшаются приблизительно по экспоненциальному закону. Так как $J_2 \sim 10^{-3}$, то $|\delta\bar{\Omega}|$, $|\delta\bar{\omega}| \ll |\delta\bar{n}|$, $|\delta\bar{e}|$. В дальнейших приближениях следует учитывать вращение атмосферы, затем ее эллипсоидальность.

§ 20. Возмущения в движении ИСЗ под действием светового давления

Сила давления солнечного света, действующая на ИСЗ, равна:

$$F_{\odot} = \frac{\bar{S}S_0(1+k)}{c}\left(\frac{\rho}{\Delta}\right)^2 \cos^2\alpha, \tag{II.182}$$

где $\bar{S}$ — площадь поперечного сечения ИСЗ; $S = 1{,}3\cdot 10^{-6} - 1{,}4 \times 10^{-6}\,\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2\text{сек}}$ — солнечная постоянная (мощность солнечной радиации на 1 см^2 земной поверхности); k — коэффициент отражения ($k=0$ для абсолютно черного тела; $k=1$ — для «абсолютного зеркала»); ρ — расстояние Земля — Солнце; Δ — расстояние ИСЗ — Солнце; α — угол падения солнечных лучей на поверхность спутника (для сферического ИСЗ $\alpha=0$ и $\cos\alpha=1$); $c=3\cdot10^5$ км/сек — скорость света. Возмущающее ускорение равно

$$w_{\odot} = \bar{\sigma}\cdot\frac{S_0}{c}(1+k)\left(\frac{\rho}{\Delta}\right)\cos^2\alpha, \qquad (II.183)$$

$\bar{\sigma}$ — отношение поверхности к массе ИСЗ (см. § 19). Как и в § 18, отношение ρ/Δ можно разложить в ряд по полиномам Лежандра:

$$\frac{\rho}{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n P_n(\cos\psi) = 1 + \frac{r}{\rho}\cos\psi + \ \ldots, \qquad (II.184)$$

где r — геоцентрический радиус-вектор спутника, ψ — угол с вершиной в центре Земли между направлениями на ИСЗ и на Солнце. Используя метод, описанный в § 18, можно получить общее разложение возмущающего ускорения. Однако ввиду малости эффекта, используем первые два члена разложения (II.184), ибо отношение $\frac{r}{\rho}\sim10^{-4}$—$10^{-5}$. Радиус-вектор Солнца ρ в первом приближении можно считать постоянным. Из сферического треугольника «полюс эклептики — ИСЗ — Солнце» (рис. 16) найдем:

$$\cos\psi = \cos\beta\cos(\lambda - \lambda_{\odot}), \qquad (II.185)$$

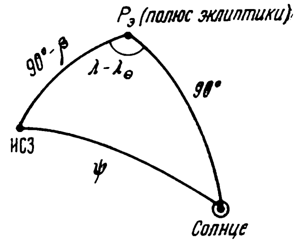

Рис. 16. Сферический треугольник Солнце — спутник — полюс эклиптики

где β и λ — эклиптические широта и долгота ИСЗ, $\lambda_{\odot}$ — эклиптическая долгота Солнца,

$$\lambda_{\odot} = 0{,}98565^{\circ}(t - t_0)^d + \ \ldots\ . \qquad (II.186)$$

Эклиптические координаты можно связать с экваториальными при помощи соотношений

$$\left.\begin{aligned}\cos\beta\cos\lambda &= \frac{x}{r} = \cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i\\ \cos\beta\sin\lambda &= \frac{y}{r}\cos\varepsilon + \frac{z}{r}\sin\varepsilon = \cos u\sin\Omega\cos\varepsilon +\\ &+ \sin u(\cos\Omega\cos i\cos\varepsilon + \sin i\sin\varepsilon)\end{aligned}\right\}, \qquad (II.187)$$

где ε — наклон эклиптики к экватору.

Подставляя (II.187) в (II.185), найдем $\cos\psi$ в функции элементов орбиты ИСЗ и эклиптической долготы Солнца. Подставив затем полученное выражение в (II.184), а (II.184) в (II.183), получим выражение для возмущающего ускорения через элементы орбиты ИСЗ и долготу Солнца. Затем следует найти компоненты возмущающего ускорения $X_\odot$, $Y_\odot$, $Z_\odot$ на оси экваториальной инерциальной системы $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Эти ускорения равны

$$X_\odot = w_\odot \frac{x_\odot - x}{\Delta}, \quad Y_\odot = w_\odot \frac{y_\odot - y}{\Delta}, \quad Z_\odot = w_\odot \frac{z_\odot - z}{\Delta}, \tag{II.188}$$

где $\frac{1}{\Delta}$ выражается при помощи (II.184). Отбрасывая члены порядка $\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \sim 10^{-8}$—$10^{-10}$ и выше и обозначая

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\sigma} \frac{S_0}{c} (1 + k) \cos^2 \alpha, \tag{II.189}$$

получим

$$\left.\begin{aligned} X_\odot &= \bar{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{x_\odot}{\rho} + \frac{r}{\rho} \left[\cos\psi \left(\frac{x_\odot}{\rho} + 1 \right) - \frac{x}{r} \right] \right\}, \\ Y_\odot &= \bar{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{y_\odot}{\rho} + \frac{r}{\rho} \left[\cos\psi \left(\frac{y_\odot}{\rho} + 1 \right) - \frac{y}{r} \right] \right\}, \\ Z_\odot &= \bar{\bar{\sigma}} \left\{ \frac{z_\odot}{\rho} + \frac{r}{\rho} \left[\cos\psi \left(\frac{z_\odot}{\rho} + 1 \right) - \frac{z}{r} \right] \right\} \end{aligned}\right\}, \tag{II.190}$$

где

$$\frac{x_\odot}{\rho} = \cos\delta_\odot \cos\alpha_\odot, \quad \frac{y_\odot}{\rho} = \cos\delta_\odot \sin\alpha_\odot, \quad \frac{z_\odot}{\rho} = \sin\delta_\odot,$$

а выражения через элементы орбиты ИСЗ величин $\cos\psi$, r, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ известны. Наконец, по формулам (II.130) находят выражения для составляющих возмущающего ускорения S, T, W и подставляют в уравнения Ньютона (II.128), которые, в свою очередь, с использованием разложений координат в эллиптическом движении (§ 7) приводят к виду (II.141). При этом целесообразно долготу узла, долготу перицентра и начальную эпоху в уравнениях Ньютона еще до интегрирования заменить их возмущенными значениями (в зависимости от J_2) при помощи выражений (II.165). Ввиду малости эффекта интегрирование уравнений достаточно вести в пределах одного оборота ИСЗ, отбросив короткопериодические члены и считая координаты Солнца постоянными [см. (II.186)]. Следует различать два случая: 1) спутник постоянно освещен Солнцем; 2) спутник периодически заходит в тень Земли. В первом случае для получения возмущений за один оборот итегрирование следует вести в пределах от 0 до 2π. Во втором случае — от момента выхода ИСЗ из тени до момента входа в тень. Эксцентрические аномалии, соответствующие моменту выхода E_1 из тени и E_2 — моменту входа, определяются из решения уравнений [53]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{a}\cos\psi &= -S(\cos E - e) - T\sqrt{1-e^2}\sin E \\ r\sin\psi = r_0, \quad \frac{r}{a} &= 1 - e\cos E \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.191)}$$

а затем из решения уравнения Кеплера можно найти сами моменты. В обоих случаях возмущения каждого элемента орбиты представляются в виде

$$\delta Э = \bar{\sigma}\sum \frac{A}{\dot{\omega} \pm \dot{\Omega} \pm \dot{\lambda}_{\odot}} \frac{\sin}{\cos}(\omega + \Omega + \lambda_{\odot}), \qquad \text{(II.192)}$$

где A — некоторые коэффициенты, зависящие от начальных элементов орбиты, причем содержание этих коэффициентов в первом и втором случае разное; $\dot{\omega}$ и $\dot{\Omega}$ — скорости изменения долгот перицентра и узла под действием второй зональной гармоники геопотенциала [формулы (II.165)]. При учете рассматриваемых возмущений за независимую переменную часто берут эксцентрическую аномалию E. Величину возмущений определяет параметр $\bar{\sigma} = \frac{\text{поверхность ИСЗ}}{\text{масса ИСЗ}}$. Например, для спутников-баллонов типа «Эхо» величина $\bar{\sigma}$ примерно в 1000 раз больше, чем для обычных спутников. Соответственно возмущения от светового давления высоты перигея спутников типа «Эхо», двигавшихся на высотах более 1000 км, составляли в среднем величину порядка 200—300 км с периодом около 10 месяцев и были соизмеримы с возмущениями от сопротивления атмосферы. Для обычных спутников величины возмущений могут достигать десятков и сотен метров.

В заключение этой главы еще раз напомним о влиянии на движение ИСЗ более мелких возмущающих факторов: приливных, электромагнитных, вторичного эффекта светового давления и т. д. Рассмотрение этих факторов выходит за рамки книги.

Глава III

ЭЛЕМЕНТЫ СПУТНИКОВОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ АСТРОНОМИИ

§ 1. Топоцентрическая траектория искусственного спутника на небесной сфере

Звезды на небесной сфере движутся по суточным параллелям, причем изменение часового угла звезды происходит пропорционально времени, т. е. $\frac{dt}{ds} = \text{const}$. Движение искусственного спутника вокруг Земли совершается не по суточной параллели и $\frac{dt}{ds}$ в связи с этим принимает разные значения в зависимости от параметров орбиты, характеризующих ее положение относительно станции наблюдений и положение на ней спутника.

Искусственные спутники Земли по сравнению с планетами и звездами имеют большое собственное движение, для них характерны значительные параллактические перемещения. Эти обстоятельства требуют соответствующей модификации известных формул сферической астрономии в случае их использования для решения задач космической (спутниковой) геодезии.

Хотя широкое применение ЭЦВМ привело в последнее время к отказу в ряде случаев от использования сферических систем координат, однако эти системы так же, как и приемы сферической астрономии, не утратили своего практического и методического значения. Формулы сферической астрономии могут использоваться для преобразования топоцентрических координат спутника в геоцентрические (и обратно), для вычисления его координат в кульминации, при восходе и заходе, для вычисления моментов этих явлений. Эти формулы могут использоваться при изучении перемещения подспутниковой точки по поверхности Земли, при изучении таких явлений, как спутниковая рефракция, спутниковая аберрация, при вычислении эфемерид спутника. Зависимость сферических координат от времени (особенно топоцентрических) требуется знать создателям аппаратуры для наблюдений спутников, а также специалистам, выполняющим наблюдения, для задания необходимого режима работы этой аппаратуры при отслеживании движения ИСЗ.

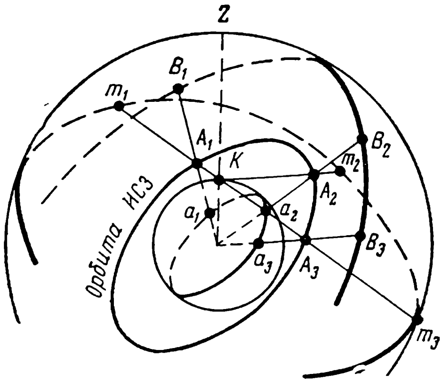

Рис. 17. Траектория искусственного спутника на небесной сфере

В настоящей главе, там где это уместно, некоторые вопросы рассматриваются с использованием прямоугольных систем координат.

Если не принимать во внимание возмущения, то геоцентрическая траектория спутника на небесной сфере будет представлять собой большой круг. Топоцентрическая траектория спутника является сложной пространственной кривой. Ее проекция на небесную сферу на коротком отрезке времени может аппроксимироваться дугой малого круга. Различие между геоцентрической и топоцентрической траекториями спутника показано на рис. 17. Большой круг на небесной сфере могут описывать трехосные спутниковые камеры, для отслеживания движения ИСЗ по малому кругу применяются четырехосные.

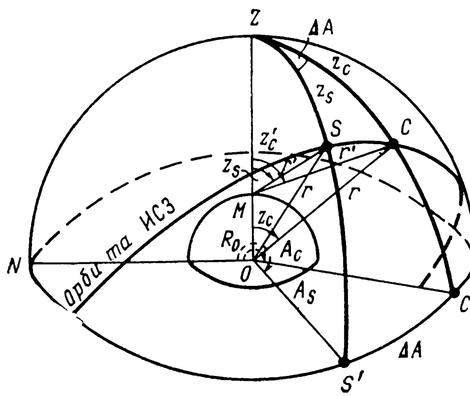

Рис. 18. К установлению зависимости между топоцентрическим и геоцентрическим зенитными расстояниями спутника

Получим формулы, устанавливающие связь геоцентрического и топоцентрического зенитных расстояний спутника. Для этого обратимся к рис. 18, на котором изображено положение спутника C в момент кульминации. Из $\Delta\ OMC$ находим

$$\operatorname{tg} z_C' = \frac{r \sin z_C}{r \cos z_C - R_0}, \tag{III.1}$$

где z_C' — топоцентрическое зенитное расстояние спутника в кульминации, соответствующее геоцентрическому зенитному расстоянию z_C. Для любого положения спутника, обозначая $\frac{r}{R_0} = k$, получим

$$\operatorname{tg} z' = \frac{k \sin z}{k \cos z - 1}. \tag{III.2}$$

Обратимся еще раз к рис. 18, на котором изображена геоцентрическая траектория спутника на небесной сфере (точка C — кульминация спутника). Из прямоугольного сферического ΔZCS следует

$$\operatorname{tg} z_S = \frac{\operatorname{tg} z_C}{\cos \Delta A}. \tag{III.3}$$

Топоцентрическое зенитное расстояние спутника z_S' в соответствии с формулой (III.2) и с учетом (III.3) будет

$$\operatorname{tg} z_S' = \frac{k \sin z_S}{k \cos z_S - 1} = \frac{k \operatorname{tg} z_C}{k \cos \Delta A - \sqrt{\cos^2 \Delta A + \operatorname{tg}^2 z_C}}. \tag{III.4}$$

В формулах (III.3) и (III.4)

$$\Delta A = A_S - A_C. \tag{III.5}$$

Если $\Delta A = 0$ (спутник в кульминации),

$$z_S' = z_C',$$

если $\Delta A = 90°$,

$$\operatorname{tg} z_S' = -k = -\frac{r}{R_0}.$$

Для спутника, находящегося в горизонте пункта наблюдений ($z_S' = 90°$), в соответствии с (III.4), получим

$$\cos \Delta A = \pm \frac{\operatorname{tg} z_C}{\sqrt{k^2 - 1}}. \tag{III.6}$$

Если топоцентрическая траектория спутника аппроксимируется на небесной сфере дугой малого круга радиуса r' (см. рис. 18), то зенитное расстояние любой точки этой дуги S_r' будет вычисляться с помощью формулы

$$\operatorname{tg} z_{S_r'}' = \frac{\operatorname{tg} z_C'}{\cos \Delta A} = \frac{k_C \sin z_C}{(k_C \cos z_C - 1) \cos \Delta A}. \tag{III.7}$$

Разность $\Delta z = z_S' - z_{S_r'}'$ для спутника, движущегося по круговой орбите на высоте 2000 км, составит при $\Delta A = 30°$ 1,1° (при $z_C = 15°$) и 3,0° (при $z_C = 30°$).

Приведенные выше формулы не учитывают сжатие Земли, ее вращение и эллиптичность орбиты.

Последнее обстоятельство можно учесть, если в соответствующих формулах вместо $r = \text{const}$ положить

$$r_i = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v_i}. \tag{III.8}$$

§ 2. Перемещение траектории спутника относительно пункта наблюдений вследствие вращения Земли

Проекцию орбиты спутника на поверхность Земли называют трассой полета спутника. Ее форма определяется величинами i и T.

Если восходящий узел орбиты находится в точке Ω, то для случая неподвижной Земли и при отсутствии возмущений, спустя время T (период обращения), спутник окажется в той же точке. Вследствие вращения Земли произойдет смещение восходящего узла по долготе к западу. За один оборот величина смещения составит

$$\Delta\lambda = 2\pi \frac{T}{T_{\oplus}} = T\omega_{\oplus}, \tag{III.9}$$

где $T_{\oplus}$ — звездные сутки, $\omega_{\oplus} = 7{,}29211 \cdot 10^{-5}$ сек$^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли.

Число витков, совершаемых спутником за сутки, получают по формуле

$$n \approx \frac{2\pi}{\Delta\lambda} = \frac{T_{\oplus}}{T}, \tag{III.10}$$

где n — ближайшее целое число.

Суточное смещение орбиты по долготе составляет

$$\Delta\lambda_{\text{сут}} = 2\pi - n \cdot \Delta\lambda, \tag{III.11}$$

причем

$$|\Delta\lambda_{\text{сут}}| \leqslant \frac{\Delta\lambda}{2}. \tag{III.12}$$

Для неподвижной Земли время прохождения спутником отрезка орбиты от перигея до точки K, находящейся на меридиане с долготой λ_K, составляет

$$\Delta T = T_K - \tau = \frac{\overset{\frown}{K\Pi}}{2\pi} T. \tag{III.13}$$

Имея в виду известные соотношения

$$M = v + 2e \sin v - \ldots,$$

$$v = u - \omega,$$

получим

$$\Delta T = \frac{[u - \omega + 2e \sin (u - \omega)]}{2\pi} T, \tag{III.14}$$

а для малых эксцентриситетов.

$$\Delta T = \frac{u - \omega}{2\pi} T. \qquad (III.15)$$

Для определения величины u следует рассмотреть сферический треугольник $\Omega SS'$ (рис. 19), из которого получаем

$$\operatorname{ctg} u = \cos i \operatorname{ctg} \Delta\lambda. \qquad (III.16)$$

За время ΔT вследствие вращения Земли точка K переместится к востоку на угол

$$\delta\lambda = \Delta T.$$

Путь, который спутник пройдет от перигея до меридиана точки K, составит соответственно $K\Pi + \delta u$.

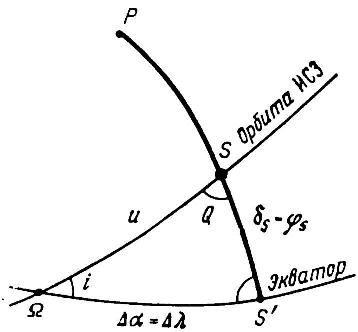

Рис. 19. К изучению перемещения траектории спутника относительно пункта наблюдений

Используя в качестве исходной формулу (III.16), находим

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \Delta\lambda} \cos i, \qquad (III.17)$$

откуда

$$\delta u = \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \Delta\lambda} \cos i \, \delta\lambda. \qquad (III.18)$$

Если δu выражать в градусной мере, а ΔT в мин, то

$$\delta u = \frac{\Delta T}{1440} 360^\circ \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \Delta\lambda} \cos i. \qquad (III.19)$$

Расстояние δu спутник пройдет за время

$$\delta T = \frac{\Delta T}{1440} T \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \Delta\lambda} \cos i. \qquad (III.20)$$

Таким образом, для прохождения спутником от перигея до меридиана точки K, с учетом вращения Земли, потребуется время

$$\Delta T = \frac{u_K - \omega}{360^\circ} T + \frac{u_K - \omega}{360^\circ} \frac{T^2}{1440} \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \Delta\lambda} \cos i. \qquad (III.21)$$

Для спутников с прямым движением $\delta T > 0$, с обратным — $\delta T < 0$.

Время между двумя последовательными прохождениями спутника через один и тот же меридиан с учетом (III.21) будет равно (без учета возмущений)

$$\Delta T_K = T \left(1 + \frac{T}{1440} \frac{\sin^2 u}{\sin^2 \Delta\lambda} \cos i\right). \qquad (III.22)$$

§ 3. Зависимость сферических координат спутника от времени

Прежде всего установим зависимость от времени аргумента широты u.

Известно, что (см. гл. II)

$$u = \omega + v,$$

$$v = M + 2e \sin M - \ldots .$$

Полагая движение спутника невозмущенным, т. е. $\frac{d\omega}{ds} = 0$ и $\frac{de}{ds} = 0$, получим

$$\frac{du}{ds} = \frac{dM}{ds} + 2e \cos M \frac{dM}{ds}.$$

Если учесть, что

$$M = \frac{2\pi}{T}(T_K - \tau),$$

$$\frac{dM}{ds} \cong \frac{2\pi}{T},$$

то получим

$$\frac{du}{ds} = \frac{2\pi}{T}(1 + 2e \cos M). \qquad \text{(III.23)}$$

Из сферического треугольника $\Omega SS'$ (см. рис. 19) следует

$$\sin\delta = \sin u \sin i = \operatorname{ctg} Q \operatorname{tg} \Delta\lambda, \qquad \text{(III.24)}$$

$$\cos i = \cos\delta \sin Q = \operatorname{tg}\Delta\lambda \operatorname{ctg} u. \qquad \text{(III.25)}$$

Из формулы (III.24) находим зависимость от времени (s) геоцентрического склонения

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{\cos u \sin i}{\cos\delta} \frac{du}{ds}. \qquad \text{(III.26)}$$

Зависимость от времени прямого восхождения определяем, используя формулу (II.25), где $\Delta\lambda = \Delta\alpha$,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos^2\Delta\lambda \cos i}{\cos^2 u} \frac{du}{ds}. \qquad \text{(III.27)}$$

Так как в $\Delta\Omega SS'$

$$\cos u = \cos\Delta\lambda \cos\delta, \qquad \text{(III.28)}$$

то вместо (II.27) можно пользоваться формулой

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos i}{\cos^2\delta} \frac{du}{ds}. \qquad \text{(III.29)}$$

Для установления зависимости от времени геоцентрических горизонтных координат обратимся к рис. 20 и известной формуле

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t, \qquad (III.30)$$

где

$$t = s - \alpha. \qquad (III.31)$$

Дифференцируя (III.30) по z, δ, s и α, получим

$$-\sin z dz = \sin\varphi\cos\delta d\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t d\delta - \cos\varphi\cos\delta\sin t ds + \\ + \cos\varphi\cos\delta\sin t d\alpha,$$

$$-\sin z\frac{dz}{ds} = [\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t]\frac{d\delta}{ds} - \\ - \cos\varphi\cos\delta\sin t + \cos\varphi\cos\delta\sin t\frac{d\alpha}{ds}.$$

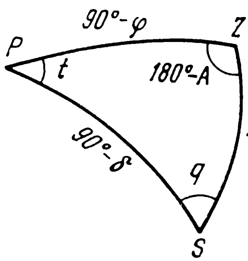

Рис. 20. Параллактический треугольник

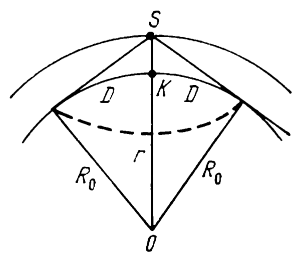

Рис. 21. Зона видимости спутника

Из параллактического треугольника PZS на рис. 20 имеем

$$\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t = \sin z\cos q,$$

$$\cos\delta\sin t = \sin z\sin A,$$

учитывая эти соотношения, получим

$$\frac{dz}{ds} = \cos\varphi\sin A\left(1 - \frac{d\alpha}{ds}\right) - \cos q\frac{d\delta}{ds}. \qquad (III.32)$$

Подставим в (III.32) значения $\frac{d\alpha}{ds}$ и $\frac{d\delta}{ds}$, предварительно преобразовав (III.26) и (III.29) с помощью соотношений из $\Delta\Omega SS'$ (см. рис. 19),

$$\cos u = \operatorname{ctg} i\operatorname{ctg} Q, \qquad (III.33)$$

$$\cos i = \cos\delta\sin Q. \qquad (III.34)$$

Принимая во внимание (III.33) и (III.34), получаем

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{\cos i}{\operatorname{tg} Q \cos \delta} \frac{du}{ds}, \tag{III.35}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin^2 Q}{\cos i} \frac{du}{ds}. \tag{III.36}$$

Теперь формула (III.32) может быть преобразована к виду

$$\frac{dz}{ds} = \cos\varphi \sin A - \left(\cos\varphi \sin A \frac{\sin^2 Q}{\cos i} + \cos q \frac{\cos i}{\operatorname{tg} Q \cos\delta}\right) \frac{du}{ds} =$$

$$= \cos\varphi \sin A - \left(\sin q \cos\delta \frac{\sin^2 Q}{\cos i} + \cos q \frac{\cos Q \cos i}{\sin Q \cos\delta}\right) \frac{du}{ds} =$$

$$= \cos\varphi \sin A - (\sin q \sin Q + \cos q \cos Q) \frac{du}{ds},$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos\varphi \sin A - \cos(Q - q) \frac{du}{ds}. \tag{III.37}$$

Первый член в правой части формулы (III.37) равен скорости движения звезды по зенитному расстоянию, второй — обусловлен особенностями движения спутника на небесной сфере по сравнению со звездой.

Взяв в качестве исходной формулу

$$\sin z \sin A = \sin t \cos\delta,$$

получим $\frac{dA}{ds}$:

$$\sin z \cos A dA + \cos z \sin A dz = \cos t \cos\delta ds - \cos t \cos\delta d\alpha -$$
$$- \sin t \sin\delta d\delta,$$

$$\sin z \cos A \frac{dA}{ds} = \cos t \cos\delta \left(1 - \frac{d\alpha}{ds}\right) - \sin t \sin\delta \frac{d\delta}{ds} -$$
$$- \cos z \sin A \frac{dz}{ds},$$

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\cos t \cos\delta}{\sin z \cos A}\left(1 - \frac{d\alpha}{ds}\right) - \frac{\sin t \sin\delta}{\sin z \cos A} \frac{d\delta}{ds} -$$
$$- \frac{\cos z \sin A}{\sin z \cos A} \frac{dz}{ds}. \tag{III.38}$$

Подставляя в (III.38) значения $\frac{d\alpha}{ds}$, $\frac{d\delta}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ и делая некоторые преобразования на основе соотношений из параллактического треугольника, (III.38) преобразуем к виду

$$\frac{dA}{ds} = \frac{\cos t \cos\delta}{\sin z \cos A}\left(1 - \frac{\sin^2 Q}{\cos i} \frac{du}{ds}\right) - \frac{\sin t \sin\delta \cos i}{\sin z \cos A \operatorname{tg} Q \cos\delta} \frac{du}{ds} -$$

$$-\cos\varphi\sin A\,\frac{\cos z\sin A}{\sin z\cos A}+\frac{\cos\varphi\sin A\cos z\sin A}{\sin z\cos A}\,\frac{d\alpha}{ds}+$$

$$+\cos q\,\frac{\cos z\sin A}{\sin z\cos A}\,\frac{d\delta}{ds}.$$

$$\frac{dA}{ds}=\frac{\cos\delta\cos q}{\sin z}-\frac{\sin(Q-q)}{\sin z}\,\frac{du}{ds}. \tag{III.39}$$

Замечание относительно структуры формулы (III.37), только применительно к азимуту, можно сделать и по отношению к формуле (III.39).

Установим зависимость от времени топоцентрических горизонтальных координат спутника. Взяв в качестве исходной формулу (III.2), получим

$$\frac{1}{\cos^2 z'}\,\frac{dz'}{ds}=\frac{(k\cos z-1)\,k\cos z+k^2\sin^2 z}{(k\cos z-1)^2}\,\frac{dz}{ds}=\frac{k^2-k\cos z}{(1-k\cos z)^2}\,\frac{dz}{ds}. \tag{III.40}$$

Подставляя теперь значение $\frac{dz}{ds}$ в соответствии с формулой (III.37), после преобразований, имеем

$$\frac{dz'}{ds}=\frac{(\cos z-k)\cos\varphi\sin A}{k-2\cos z+\frac{1}{k}}+\frac{(k-\cos z)\sin(Q-q)}{k-2\cos z+\frac{1}{k}}\,\frac{du}{ds}. \tag{III.41}$$

Если пренебречь сжатием Земли, то $A'=A$, следовательно,

$$\frac{dA'}{ds}=\frac{dA}{ds}. \tag{III.42}$$

§ 4. Условия видимости ИСЗ

Наблюдения спутника возможны в том случае, если он находится над горизонтом пункта наблюдений. Пусть спутник S находится в некоторый момент в зените точки K земной поверхности (см. рис. 21). Тогда он будет виден с поверхности Земли внутри круговой зоны радиуса D, величина которого есть функция радиуса-вектора (r) спутника и вычисляется при помощи формулы

$$\sec D=\frac{r}{R_0}=k. \tag{III.43}$$

Формула (III.43) не учитывает влияния астрономической рефракции, величина которой в горизонте $\rho=36'-37'$. По этой причине радиус круговой зоны будет увеличиваться на такую же величину, что в линейной мере составляет примерно 40 км.

Для определения моментов восхода и захода и азимута спутника в эти моменты обратимся к чертежу на рис. 22, где показан участок орбиты и обозначена зона, внутри которой спутник будет над горизонтом для наблюдателя, находящегося в точке с зенитом S.

Рассмотрим сферический треугольник $SK\varkappa$, принимая во внимание, что

$$\left.\begin{aligned} \cos \zeta_\varkappa &= \sin i \cos \Delta\lambda_K , \\ \cos \varphi_\varkappa &= \cos i \operatorname{cosec} \zeta_\varkappa \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.44)}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_K - \varphi_\varkappa \\ \Delta\lambda_K &= \lambda_K - \lambda_\Omega \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(III.45)}$$

где φ_K, λ_K — географические координаты точки K. Запишем для упомянутого сферического треугольника формулу котангенсов и формулу косинуса стороны

$$\left.\begin{aligned} -\cos\Delta\varphi \cos A &= -\operatorname{ctg} D \sin\Delta\varphi + \operatorname{ctg} \zeta_\varkappa \sin A \\ \cos D &= \cos\Delta\varphi \cos\Delta u - \sin\Delta\varphi \sin\Delta u \cos\zeta_\varkappa \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(III.46)}$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\Xi &= \cos\Delta\varphi \operatorname{tg}\zeta_\varkappa \\ \operatorname{tg}\Psi &= \operatorname{tg}\Delta\varphi \cos\zeta_\varkappa \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.47)}$$

и на основе формул (III.46) получим

$$\sin(A - \Xi) = \operatorname{tg}\Delta\varphi \operatorname{ctg} D \sin\Xi, \qquad \text{(III.48)}$$

$$\cos(\Delta u + \Psi) = \cos D \cos\Psi \sec\Delta\varphi. \qquad \text{(III.49)}$$

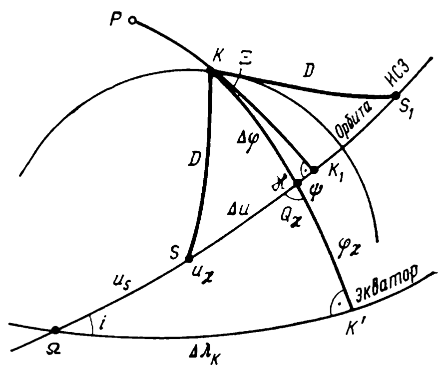

Рис. 22. Условия восхода и захода спутника

Формула (III.48) позволяет вычислить азимут в момент восхода, отсчитанный от точки севера, а (III.49) величину Δu, которая необходима для определения момента восхода.

Аналогичным образом определяются величины A и Δu для момента захода спутника, когда он находится в положении S_1 (см. рис. 22).

В соответствии с рис. 22 получим, опуская промежуточные выкладки,

$$\left.\begin{aligned} \sin(A - \Xi) &= \operatorname{tg}\Delta\varphi \operatorname{ctg} D \sin\Xi \\ \cos(\Delta u - \Psi) &= \cos D \cos\Psi \sec\Delta\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(III.50)}$$

Для случая, когда точка K лежит южнее орбиты, будут действительны формулы:

для восхода

$$\left.\begin{aligned} \sin(A - \Xi) &= -\operatorname{tg}\Delta\varphi \operatorname{ctg} D \sin\Xi \\ \cos(\Delta u - \Psi) &= \cos D \cos\Psi \sec\Delta\varphi \end{aligned}\right\}, \tag{III.51}$$

для захода

$$\left.\begin{aligned} \sin(A - \Xi) &= -\operatorname{tg}\Delta\varphi \operatorname{ctg} D \sin\Xi \\ \cos(\Delta u + \Psi) &= \cos D \cos\Psi \sec\Delta\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{III.52}$$

Аналогичный вид будут иметь формулы для случая, когда спутник находится вблизи нисходящего узла орбиты.

Переходим к вычислению моментов явлений. В соответствии с рис. 22 имеем

$$\Delta u = u_{\varkappa} - u_S. \tag{III.53}$$

Из параллактического треугольника $\Omega \varkappa K'$ найдем

$$\cos u_{\varkappa} = \operatorname{ctg} i \operatorname{ctg} Q_{\varkappa}. \tag{III.54}$$

Из (III.53) с учетом (III.54) следует, что

$$u_S = \arccos(\operatorname{ctg} i \operatorname{ctg} Q_{\varkappa}) - \Delta u. \tag{III.55}$$

Можно воспользоваться другой формулой для $u_{\varkappa}$

$$\operatorname{ctg} u_{\varkappa} = \cos i \operatorname{ctg} \Delta\lambda_K, \tag{III.56}$$

тогда

$$u_S = \operatorname{arc\,ctg}(\cos i \operatorname{ctg} \Delta\lambda_K) - \Delta u. \tag{III.57}$$

Получив по (III.55) или по (III.57) u_S, далее находим истинную аномалию

$$v = u_S - \omega. \tag{III.58}$$

Момент восхода получается по формуле

$$T_{\text{восх}} = \frac{\overset{\frown}{K\Pi}}{2\pi} + \tau. \tag{III.59}$$

Формулу (III.59) можно привести к виду

$$T_{\text{восх}} = \frac{T}{1440}\left[u_S - \omega + 2e\sin(u_S - \omega)\right] + \tau. \tag{III.60}$$

Аналогично определяют момент захода.

Геометрический смысл величин Ξ и ψ будет понятен, если обратиться к чертежу на рис. 22.

Зная моменты восхода и захода спутника относительно горизонта пункта наблюдений, можно вычислить время, в течение которого этот спутник находится в пределах прямой видимости. Все остальное время суток он будет находиться в тени Земли.

Обозначим видимую из пункта наблюдений часть орбиты спутника через $2l$, тогда

$$l = \Delta u_{\text{восх}} + \Psi = \Delta u_{\text{зах}} - \Psi. \tag{III.61}$$

На основании приведенных выше формул

$$\cos l = \cos D \cos \Psi \sec \Delta\varphi. \tag{III.62}$$

Время нахождения ИСЗ в пределах прямой видимости

$$\Delta T_{2l} = T_{\text{восх}} - T_{\text{зах}}. \tag{III.63}$$

С учетом (III.61), (III.62) получим

$$\Delta T_{2l} = \frac{T}{1440}[2l + 4e(\cos u_{\varkappa} \cos l \cos \Psi - \sin u_{\varkappa} \sin l \sin \Psi), \tag{III.64}$$

где $u_{\varkappa}$ находят при помощи (III.54) или (III.56).

Строго говоря, в полученный результат следовало бы ввести поправку за скорость вращения Земли. Для наблюдателя, находящегося в пункте с $\varphi = 45°$ и ведущего наблюдения ИСЗ, движущегося на высоте 1500 км, эта поправка составит около 2^m.

Рассмотренное условие является необходимым для наблюдений спутников, но недостаточным.

Для активных спутников следует учесть ограничение при их наблюдениях по зенитному расстоянию. Установлено, что не следует из-за влияния рефракции в атмосфере наблюдения выполнять на $z > 70°$—$75°$.

При фотографических наблюдениях пассивных спутников дело обстоит гораздо сложнее. Необходимо обеспечить такое взаимное расположение пункт — спутник — Солнце, чтобы было возможно фотографирование спутника на фоне звезд, в то время как Солнце находится под горизонтом на зенитных расстояниях порядка 100—102°.

Из рассмотрения должна быть исключена та часть орбиты, при движении по которой спутник находится в тени Земли. Практически во всех случаях можно удовлетвориться приближенным решением, что позволяет считать Землю шаром и пренебречь эффектом полутени. При таких предпосылках тень Земли будет иметь форму цилиндра, радиус которого равен радиусу Земли R_0. Обозначим зенитное расстояние Солнца, наблюдаемого со спутника, через $z_{\odot}$, угол между направлениями центр Земли — спутник и касательной к поверхности Земли, проведенной из спутника, через χ.

Если

$$\chi > z_{\odot}, \tag{III.65}$$

то спутник освещается Солнцем,

если

$$\chi \leqslant z_{\odot}, \tag{III.66}$$

то спутник находится в тени Земли; причем

$$\chi = z_{\odot} \tag{III.67}$$

есть условие пересечения спутником границы тени Земли.

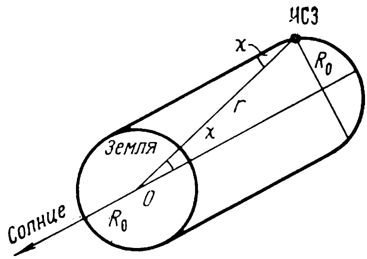

Рис. 23. К учету пребывания спутника в тени Земли

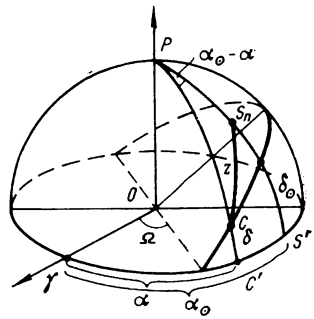

Рис. 24. К выводу уравнения тени

В соответствии с рис. 23 угол χ может быть определен с помощью формулы

$$\cos\chi = -\sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}}\,. \tag{III.68}$$

Обратимся теперь к чертежу на рис. 24. На этом рисунке точки S_n, S и P являются проекциями на поверхность небесной сферы соответственно Солнца, спутника и северного полюса. Из сферического треугольника S_nSP находим

$$\cos z_{\odot} = \sin\delta\sin\delta_{\odot} + \cos\delta\cos\delta_{\odot}\cos(\alpha_{\odot} - \alpha)\,. \tag{III.69}$$

Для момента пересечения спутником границы тени Земли в соответствии с (III.67) можно записать

$$\sin\delta\sin\delta_{\odot} + \cos\delta\cos\delta_{\odot}\cos(\alpha_{\odot} - \alpha) = -\sqrt{1 - \frac{R_0^2}{r^2}}\,. \tag{III.70}$$

Уравнение (III.70) называют уравнением тени. Его можно преобразовать, подставив вместо $\alpha_{\odot}$ и $\delta_{\odot}$ их значения, например, взятые из «Астрономического ежегодника», а вместо координат спутника α и δ выражения вида

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \Omega + \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} u\cos i) \\ \delta &= \arcsin(\sin u\sin i) \end{aligned}\right\}. \tag{III.71}$$

В конечном счете из решения уравнения (III.70), если спутник попадает в тень Земли, могут быть найдены значения истинных аномалий ($v=u-\omega$), соответствующих моментам входа в тень и выхода из нее.

Из теории движения спутника (гл. II) известна связь между значениями истинной и эксцентрической аномалии. Зная последнюю, можно найти искомый момент по формуле

$$t_i = \frac{E_i - e\sin E_i}{n} + \tau. \tag{III.72}$$

Решение рассмотренной задачи имеет важное значение не только для эфемеридной службы спутников. Моменты входа спутника в тень и выхода из нее необходимо знать для учета влияния на движение ИСЗ светового давления. С использованием аналогичного математического аппарата решается также задача по определению условий освещенности планеты, что весьма важно знать при фотографировании ее поверхности с борта спутника планеты.

Для более экономного расходования машинного времени и оперативного получения результатов пользуются графиками, на которых для интервалов времени, в которые планируются наблюдения спутников, фиксируют время нахождения спутника в тени Земли, наносят кривые моментов восхода и захода Солнца, а также кривые моментов сумерек и рассвета (для некоторого заданного значения $h=-10^\circ$, -12° и т. д.).

§ 5. Кульминация спутника

Под кульминацией спутника в пункте K будем понимать такое его положение на орбите, когда расстояние от проекции точки K на небесную сферу до проекции спутника K_1 будет минимальным, т. е. $KK_1 \perp SK_1$.

Для вычисления момента кульминации необходимо сначала найти значение $u_{\text{кульм}}$. В соответствии с чертежом на рис. 22

$$u_{\text{кульм}} = u_{\text{восх}} + \arccos(\cos D \cos\Psi \sec\Delta\varphi). \tag{III.73}$$

Это же значение можно получить из рассмотрения двух прямоугольных сферических треугольников $\Omega Q_\varkappa K'$ и $\varkappa KK_1$ (см. рис. 22)

$$u_{\text{кульм}} = \operatorname{arc\,ctg}(\cos i \operatorname{ctg}\Delta\lambda_K) + \operatorname{arc\,tg}(\cos Q_\varkappa \operatorname{tg}\Delta\varphi). \tag{III.74}$$

Располагая значениями $u_{\text{кульм}}$ и пользуясь формулой (III.60), находим момент кульминации.

В соответствии с формулой (III.48) азимут в момент кульминации равен

$$A_{\text{кульм}} = \arcsin(\operatorname{tg}\Delta\varphi \operatorname{ctg} D \sin\Xi) \tag{III.75}$$

или с использованием соотношений из $\Delta\varkappa KK_1$

$$A_{\text{кульм}} = 180^\circ - \operatorname{arc\,ctg}(\cos\Delta\varphi \operatorname{tg} Q_\varkappa). \qquad \text{(III.76)}$$

Геоцентрическое зенитное расстояние в момент кульминации равно (из $\Delta\Omega\varkappa K'$ и $\Delta\varkappa KK_1$)

$$z_{\text{кульм}} = KK_1 = \arcsin(\sin\Delta\varphi \sin i \cos\varphi_\varkappa \sin\Delta\lambda). \qquad \text{(III.77)}$$

Топоцентрическое зенитное расстояние находят по формуле (III.2).

§ 6. Прохождение ИСЗ через меридиан пункта наблюдений

Из рассмотрения рис. 25, на котором изображено прохождение спутника через меридиан KK', находим геоцентрическое зенитное расстояние и величину u_K:

$$Z_\varkappa - Z_{K'} = \varphi_K - \varphi_\varkappa, \qquad \text{(III.78)}$$

$A = 180^\circ$ (в других случаях может быть 0°),

$$\operatorname{tg} u_K = \operatorname{tg} u_\varkappa = \operatorname{tg}\Delta\lambda \sec i. \qquad \text{(III.79)}$$

Далее вычисляем момент прохождения через меридиан

$$T_K = \tau + \frac{T}{1440}\left[u_K - \omega + 2e\sin(u_K - \omega)\right]. \qquad \text{(III.80)}$$

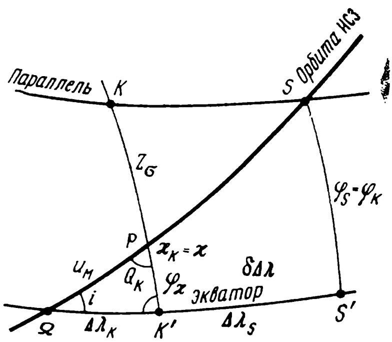

Рис. 25. Прохождение ИСЗ через меридиан и параллель пункта

В приведенных формулах

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_\varkappa &= \cos i \operatorname{cosec} Q_\varkappa \\ \cos Q_\varkappa &= \sin i \cos\Delta\lambda \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(III.81)}$$

§ 7. Прохождение ИСЗ через параллель пункта наблюдений

Из прямоугольного сферического треугольника $\Omega SS'$

$$\sin u_{\text{пар}} = \sin\varphi \operatorname{cosec} i, \qquad \text{(III.82)}$$

получив $u_{\text{пар}}$, по формуле (III.60) вычисляем момент прохождения через параллель места.

Азимут спутника (геоцентрический) в момент прохождения им параллели пункта наблюдений получается на основе формулы котангенсов из сферического треугольника PKS (см.

рис. 25). Опуская элементарные промежуточные преобразования, имеем

$$\operatorname{tg} A = \pm \frac{\sin \delta\Delta\lambda}{\sin \varphi (1 - \cos \delta\Delta\lambda)} \begin{cases} E \\ W \end{cases}. \qquad (III.83)$$

При справедливости допущения о сферичности Земли вычисленное по этой формуле значение азимута будет также и топоцентрическим.

Получим формулы для вычисления геоцентрических зенитных расстояний спутников при прохождении их через параллель пункта. При $A = 90^\circ$ из треугольника PKS находим

$$\sin z_{\text{пар}} = \sin \delta\Delta\lambda \cos \varphi_S , \qquad (III.84)$$

причем

$$\delta\Delta\lambda = \lambda_S - \lambda_K . \qquad (III.85)$$

Не налагая никаких ограничений на величину A, находим

$$\cos z_{\text{пар}} = \sin^2 \varphi_S + \cos^2 \varphi_S \cos \delta\Delta\lambda. \qquad (III.86)$$

Топоцентрическое зенитное расстояние вычисляется по формуле (III.2).

§ 8. Параллакс спутника

Геоцентрическое положение ИСЗ и его топоцентрическое положение связывают формулы (оси координат параллельны)

$$\left. \begin{aligned} x &= x' + X \\ y &= y' + Y \\ z &= z' = Z \end{aligned} \right\}. \qquad (III.87)$$

Переходя к сферическим координатам, получаем (ось x направлена в точку γ)

$$\left. \begin{aligned} r \cos \delta \cos \alpha &= r' \cos \delta' \cos \alpha' + R \cos \Phi \cos s \\ r \cos \delta \sin \alpha &= r' \cos \delta' \sin \alpha' + R \cos \Phi \sin s \\ r \sin \delta &= r' \sin \delta' + R \sin \Phi \end{aligned} \right\}. \qquad (III.88)$$

Формулы (III.88) можно разрешить относительно топоцентрических координат α' и δ' и таким образом установить их зависимость от геоцентрических α и δ.

В сферической астрономии даются формулы, выражающие зависимость между экваториальными и горизонтными координатами. С использованием этих формул и соотношений (III.88) могут быть получены зависимости между топоцентрическими и геоцентрическими горизонтными координатами, которые выше были установлены другим путем.

§ 9. Влияние аберрации

Фиксируя время T в момент наблюдений спутника и получая в дальнейшем его координаты, нужно учесть, что эти координаты относятся к другому моменту T'. Разность между моментами T и T' обусловлена влиянием спутниковой аберрации и называется аберрационным временем

$$\Delta T = T - T' = \frac{r}{c}, \tag{III.89}$$

где r — расстояние до ИСЗ, c — скорость света.

При обработке наблюдений поправкой за аберрацию не обязательно исправлять момент. Можно ее учесть, исправляя непосредственно значения прямого восхождения и склонения, причем

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{r}{c} \\ \Delta\delta &= \frac{d\delta}{dt} \cdot \frac{r}{c} \end{aligned}\right\}. \tag{III.90}$$

Значения скоростей $\frac{d\alpha}{dt}$ и $\frac{d\delta}{dt}$ можно получить из обработки негативов, используя прерывистые следы изображений спутников и производя соответствующие измерения.

Само собой разумеется, что поправки за суточную и годичную аберрацию должны быть введены в полученные на основе каталогов координаты звезд. Формулы для этой цели приводятся в курсах сферической астрономии.

§ 10. Спутниковая рефракция

Все выводы относительно астрономической рефракции в астрономии базируются на положении, согласно которому наблюдаемые объекты находятся практически в бесконечности. Такой подход не приемлем в космической геодезии, особенно, если речь идет о сравнительно невысоких спутниках.

О том, что влияние рефракции будет разным для звезды и спутника, свидетельствует рис. 26. Согласно этому рисунку

$$\rho_S = \rho_* - \Delta\rho, \tag{III.91}$$

причем

$$\rho_* = \rho_*^\circ \gamma B, \tag{III.92}$$

где ρ_*° — средняя рефракция, равная

$$\rho_*^\circ = 58{,}29'' \operatorname{tg} z - 0{,}0668'' \operatorname{tg}^3 z \tag{III.93}$$

при давлении 760 мм Hg и температуре $+10°$ C,

$$\rho_*^\circ = 60{,}25'' \operatorname{tg} z - 0{,}0682'' \operatorname{tg}^3 z \qquad \text{(III.94)}$$

при давлении 760 мм Hg и температуре 0° C. Коэффициенты γ и B учитывают отступления значений температуры и давления от стандартных.

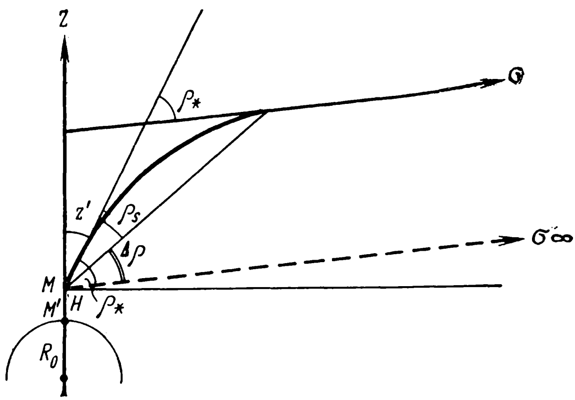

Рис. 26. Спутниковая рефракция

«Параллактическая» (спутниковая) рефракция ($\Delta\rho$) по Вейсу равна

$$\Delta\rho = k_3 \frac{1}{r} \operatorname{tg} z \sec z \left[1 + k_4 (2 \sec^2 z + \operatorname{tg}^2 z)\right] (1 - e^{-0{,}1385\, h}), \qquad \text{(III.95)}$$

где $k_3 = 435{,}0$ [$''$/км] и $k_4 = -0{,}00113$ [$''$/км], е — основание натуральных логарифмов, h — высота спутника в км.

При $h \geqslant 1000$ км и $z \leqslant 45°$ можно пользоваться приближенной формулой

$$\Delta\rho = \rho'' \frac{2{,}33}{h} \operatorname{tg} z. \qquad \text{(III.96)}$$

В формуле (III.96) величина h задается в метрах.

Формулы, выражающие влияние рефракции на экваториальные координаты спутника, аналогичны формулам, пригодным для звезд. Они могут быть взяты из соответствующих разделов курсов сферической астрономии, причем вместо ρ_* них надо подставить ρ_S.

Глава IV

МЕТОДЫ И АППАРАТУРА ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

§ 1. Особенности наблюдений ИСЗ

Наблюдения ИСЗ обладают рядом особенностей по сравнению с наблюдениями других небесных объектов. Прежде всего следует отметить, что спутники движутся на небесной сфере с большой скоростью, достигающей в отдельных случаях (в зависимости от высоты спутника) 1,0°—1,5° в сек. В связи с этим предъявляются высокие требования к точности фиксирования моментов наблюдений, ибо ошибка в моменте, равная $0{,}001^s$, приводит к ошибке в положении спутника порядка 10 м.

Использование оптических методов наблюдений требует освещения спутника. Спутники могут быть освещены Солнцем и лучом лазера. Такие спутники, светящиеся отраженным светом, называются пассивными. Спутники, имеющие на борту специальные лампы-вспышки или радиотехническую аппаратуру, называются активными. Наблюдения пассивных спутников, освещаемых солнечным светом, возможны ограниченное в течение суток время (в сумерках). При этом в пункте наблюдений Солнце уже находится под горизонтом, однако его удаление от горизонта не слишком велико, и спутник в силу своего возвышения над горизонтом еще освещается солнечными лучами. Время видимости активного и пассивного спутников в зависимости от высоты при минимальном угле возвышения, равном 15°, приведено в табл. 1.

Таблица 1

Время видимости спутника (в %) в течение одного оборота ($h \geqslant 15°$)

Тип спутника	Высота, $H_{км}$		
	1200	3000	6000
Пассивный	23	38	51
Активный	54	61	68

Приведенные рассуждения не относятся к пассивным ИСЗ, освещаемым лазером.

Изменение взаимного положения Солнца, пассивного спутника и Земли будет приводить к изменению его блеска (эффект фазы). Блеск спутника будет изменяться также в результате изменений отражений поверхности. Изменения блеска приведут к дополнительным ошибкам фотографических наблюдений ИСЗ.

В случае большой скорости движения ИСЗ и при использовании для его фотографирования на фоне звезд неподвижных камер или камер, отслеживающих движение звезд, получаем разновременные результаты фотографирования. В результате этого короткопериодические рефракции, обусловленные турбулентными явлениями в атмосфере, будут смещать систематическим образом положения спутника относительно поля опорных звезд. По мнению специалистов турбулентные явления в атмосфере ограничивают точность фотографических наблюдений ИСЗ, не позволяя получить направления на него точнее 0,4—0,5″. При наблюдениях слабых спутников должны использоваться специальные камеры, в которых тем или иным способом осуществляется отслеживание движения спутника.

Радиотехнические методы наблюдений ИСЗ требуют оснащения спутников специальной аппаратурой, за исключением радиолокационного метода, когда спутник используется как пассивный ретранслятор. В настоящее время этот метод не применяется при решении задач космической геодезии, так как дает результаты невысокой точности.

§ 2. Классификация методов наблюдений ИСЗ

Методы наблюдений ИСЗ можно подразделить на оптические и радиоэлектронные (радиотехнические).

К оптическим методам относятся: визуальные, фотографические, фотоэлектрические и лазерные наблюдения.

К радиоэлектронным методам относятся: интерференционные, доппелеровские и дальномерные наблюдения. Кроме того, существуют комбинированные методы радиоэлектронных наблюдений.

Оптические методы наблюдений требуют наличия прямой видимости пункт—спутник и определенного взаимного положения между пунктом, спутником и Солнцем. Последнее требование вносит особые ограничения при наблюдении пассивных спутников. Радиоэлектронные методы могут применяться в любых метеорологических условиях (в дождь, туман и т. д.) и в любое время суток, в этом смысле они являются более универсальными.

Визуальные наблюдения не обеспечивают точность, достаточную для использования результатов этих наблюдений в геодезических целях. Они ведутся теодолитами, кинотеодолитами, простейшими телескопами. Полученные данные используются для определения предварительных элементов орбиты и могут быть полезны на начальной стадии существования ИСЗ.

Простейшим телескопом, применявшимся для наблюдений спутников в СССР при первых их запусках, являлась астрономическая трубка АТ-1 (увеличение 6^x, диаметр объектива 50 мм, поле зрения 11°). Аналогичные телескопы применялись в США. Точность наблюдений такой аппаратурой не превышала $0{,}1$—$0{,}3^s$ по времени и 0,2—0,3° по положению.

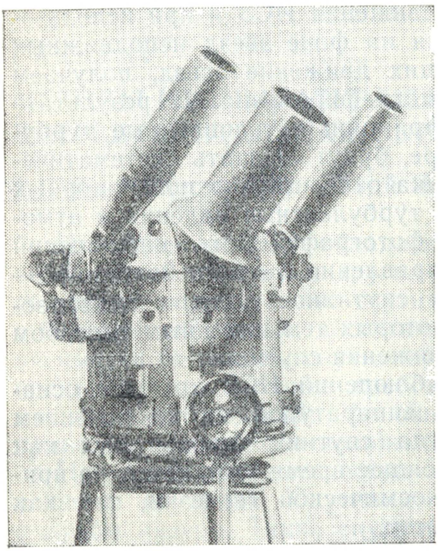

Рис. 27. Кинотеодолит Аскания

Более высокую точность удавалось получить при визуальных наблюдениях теодолитами Вильд Т-3, Керн ДКМ-3, Керн ДКМ-3А, Аскания TPR и некоторыми другими, особенно в том случае, если эти теодолиты были снабжены специальным оборудованием для регистрации моментов наблюдений, фотографирования отсчетов кругов, уровней и поля зрения трубы.

Наиболее пригодным для визуальных наблюдений является инструмент типа кинотеодолит, имеющий трубы-искатели и электромеханический привод, что позволяет отслеживать движение спутника и наблюдать его в течение одного прохождения многократно. Отсчеты кругов и поле зрения при этом фотографируются. Примером подобного инструмента является кинотеодолит Аскания (рис. 27).

Однако применение теодолитов и кинотеодолитов позволяет в лучшем случае обеспечить точность наблюдений 10—20″ по положению и $0{,}0{,}1^s$—$0{,}02^s$ по времени, чего также недостаточно для использования этих данных в геодезических целях.

§ 3. Фотографические наблюдения спутников

Наиболее широкое распространение получили фотографические наблюдения ИСЗ, так как долгое время ни один другой метод не мог с ними конкурировать по точности. Однако бурное развитие сначала допплеровских, а затем лазерных наблюдений отодвигает эти методы по точности на второе место.

Фотографические наблюдения документальны, позволяют в случае необходимости многократно повторять измерения. Положения ИСЗ на снимке определяются путем привязки к опорным звездам в системе некоторого звездного каталога. Широкому применению фотографического метода в немалой степени способствовал почти полувековой опыт, накопленный астрономами в области теории и практики фотографической астрометрии. Вместе с тем отмеченные выше особенности наблюдений ИСЗ потребовали внесения в классические методы и приемы фотографической астрометрии существенных корректив. Эти коррективы затронули аппаратурные вопросы, методику наблюдений, приемы обработки и т. д.

Эффективность фотографического телескопа при регистрации движущегося точечного объекта выражается формулой

$$э = \frac{SD^2}{\omega dF}, \tag{IV.1}$$

где S — чувствительность фотоэмульсии; ω — угловая скорость объекта, d — кружок рассеяния фотоэмульсии, D — диаметр объектива, F — фокусное расстояние телескопа.

Применяя достаточно светосильную систему большого диаметра в сочетании с чувствительными приемниками излучения (фотопластинка, фотопленка, электронно-оптический преобразователь, телевизионная система), можно наблюдать весьма слабые ИСЗ. Важное значение имеет также контрастная чувствительность установки, особенно при наблюдениях в сумерках, когда при коротких экспозициях возникает опасность, что на снимке не получится достаточного количества звезд.

Требования к параметрам фотографических камер являются противоречивыми.

Учитывая, что масштаб фотографического изображения равен

$$m'' = \frac{1}{F}\rho'', \tag{IV,2}$$

можно заключить, что для повышения измерительных качеств изображения фокусное расстояние камеры F должно быть достаточно большим.

На снимке должно получиться достаточное для решения задачи количество опорных звезд. В этой связи должны быть сформулированы требования относительно размеров поля зрения камеры и величины действующего отверстия D или относительного отверстия D/F.

Для вычисления размеров поля зрения камеры применяется формула

$$2\sigma = \frac{a}{F}\rho^\circ, \tag{IV.3}$$

где a — сторона снимка.

В соответствии с формулой (IV.3) фокусное расстояние не должно быть слишком большим, чтобы обеспечить достаточные размеры поля зрения.

При одной и той же выдержке будет получаться тем большее количество звезд, чем больше будет диаметр действующего отверстия объектива.

Повышение измерительных качеств получаемых снимков предполагает также максимально возможное устранение аберраций объектива по всему полю. Исключение обычно составляет дисторсия, так как одновременное исправление ее и сферической аберрации для значительного поля практически невозможно. Поскольку поправки за дисторсию с высокой степенью точности можно получить в результате специальных исследований, предпочитают исправлять сферическую аберрацию и получать резкие изображения.

Согласно расчетам, выполненным в Смитсонианской астрофизической обсерватории (SAO) США, камера для наблюдения спутников не должна иметь параметры меньше следующих: $F=400$ мм, $D=100$ мм, $2\sigma=5\times10°$ (10° — вдоль следа ИСЗ). Предпочтительнее однако, если $F=1000$ мм, $D=150$—200 мм.

Для фотографирования использовались и используются как модифицированные камеры, в первоначальном варианте применявшиеся для других целей (НАФА-3с/25, Вильд ВС-4 и т. д.), так и специально созданные спутниковые камеры (Бейкера-Нанна, АФУ-75, ВАУ, SBG и т. д.).

Все камеры, используемые для наблюдений спутников, можно разделить на две группы. Камеры одной из этих групп не отслеживают движение спутника. Они могут иметь азимутальную или экваториальную монтировку. В последнем случае камера может отслеживать суточное движение звезд, что позволяет получать на снимке более слабые звезды. Вторую группу образуют следящие камеры. Эти камеры имеют трехосную или четырехосную монтировку. Как правило, неследящие камеры более портативные и дешевые. Иногда фотографические камеры для наблюдений спутников делят на три группы: азимутальные (неподвижные), экваториальные (звездные) и следящие.

В зависимости от режима съемки получаются разные снимки (рисунки 28, 29, 30).

При наблюдениях камерой, отслеживающей движение звезд, на снимках получаются звезды, яркость которых на 3 величины меньше, чем в случае использования неподвижной камеры. Соответственно при наблюдениях камерой, отслеживающей движение спутника, получаем преимущество в 5 звездных величин по сравнению с камерой неподвижной.

Отслеживание движения ИСЗ и тем самым интегрирование световой энергии в определенной точке фотографической пластинки (пленки) может осуществляться в разных камерах одним из следующих методов:

1) по малому кругу путем перемещения камеры (четырехосная монтировка);

2) по большому кругу путем перемещения камеры (трехосная монтировка);

3) путем использования плоско-параллельной пластинки;

4) путем перемещения кассеты или пленки.

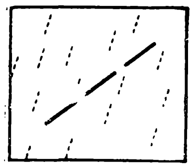

Рис. 28. Фотографические наблюдения спутников. Камера неподвижна

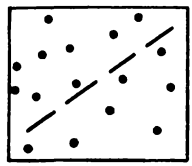

Рис. 29. Фотографические наблюдения. Камера отслеживает движение звезд

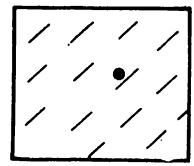

Рис. 30. Фотографические наблюдения. Камера отслеживает движение спутника

Для контроля наведения на спутник и обеспечения необходимого режима слежения некоторые камеры имеют телескоп-гид (АФУ-75, ВАУ, SBG).

Следящие камеры не только позволяют фотографировать более слабые спутники, а также позволяют получать большее количество снимков за одно прохождение.

Камеры для фотографических наблюдений ИСЗ снабжены специальными затворами, с помощью которых задается необходимая продолжительность экспозиции. Многие из них имеют обтюраторы для прерывания следов спутника и звезд на фотопленке (фотопластинке), что обеспечивает временную привязку снимков.

Данные о некоторых фотографических камерах для наблюдений ИСЗ приводятся в табл. 2.

Рассмотрим подробнее устройство нескольких наиболее мощных и распространенных следящих камер.

Камера АФУ-75 (СССР). Камера создана в 1965 г. на станции наблюдений ИСЗ при Рижском государственном университете М. Абеле и К. Лапушкой. Основой для ее создания послужила созданная теми же авторами в 1960 г. камера ТАФО-75. В настоящее время камера АФУ-75 выпускается промышленностью серийно и используется как в нашей стране, так и за рубежом. Монтировка камеры четырехосная (рис. 31), что позволяет отслеживать спутник по дуге малого круга. Камера представляет собой телескоп с семилинзовым объективом типа «Уран-16», относительное отверстие $D/F=1:3{,}5$. Фокусное

Таблица 2

Фотографические камеры для наблюдения ИСЗ

Название камеры	Страна-изготовитель	Монтировка	Фокусное расстояние, см	Действующее отверстие объектива, см	Поле зрения, градус×градус	Фотоматериал и размеры снимка, мм	Масштаб в центре снимка, мм	Сведения о достигнутой точности, "
			Неследящие камеры					
НАФА-3с/25	СССР	Двухосная	25	10	50×30	Пленка	825	3—4
ФАС	СССР	»	48	25	10×7	Пластинка	430	1,5—3,0
MOTS-24	США	»	60	10		»	344	—
MOTS-40	США	»	101,6	20,3	10×10	»	202	2
PC-1000	США	»	100	21	10×10	203×254 Пластинка	206	1—2
IGN-1964	Франция	»	30	6,7	35×35	215×190 Пластинка	685	2—4
Wild-BC-4	Швейцария	»	45	11,5	25×25	«	460	—
			30,4	11,5	35×35	«	675	2
ВМК А 30/23	ФРГ	»	46,3	23	30×30	215×190 Пластинка	445	—
Хьюита	Англия	»	91,5	14,8	14×14	«	225	1
Шмидт	Англия	»	60	63	10×10	Пластинка 206×249	240	1,1
Цейсс	ГДР	»	100	20	4,7×3,5	—	225	—
Познань 2	ПНР	»	100	14	8×6	—	206	—
Шмидт	Финляндия	»	103	34	5×5	—	200	—
Малая	Япония	»	60	13	12×12	Пластинка	345	—
Шмидт	Япония	»	76	42		«	260	—
			Следящие					
АФУ-75	СССР	Четырехосная	76	21	15×10	Пленка	275	1—2
ВАУ	СССР	Трехосная	70	50	30×5	«	294	—
Baker-Nunn	США	»	53,5	53,5	36×5	«	385	2
SBG	ГДР	Четырехосная	76	42,5	6×6	56×300 Пластинка	260	—
Antares	Франция	Трехосная	90	30	11×11	—	229	2

расстояние равно F=736 мм, поле зрения $10 \times 14°$. Имеется телескоп-гид ($D=120$ мм, увеличение 8 и 20^x, им соответствует поле зрения 6 и 3°). Гид необходим для контроля наведения основного телескопа (камеры) на спутник и для контроля соответствия скорости компенсации и реальной скорости движения спутника. Вся камера смонтирована на оригинальной экваториальной платформе (рис. 32). Эта платформа предназначена для отслеживания суточного движения звезд в течение 2—3 мин.

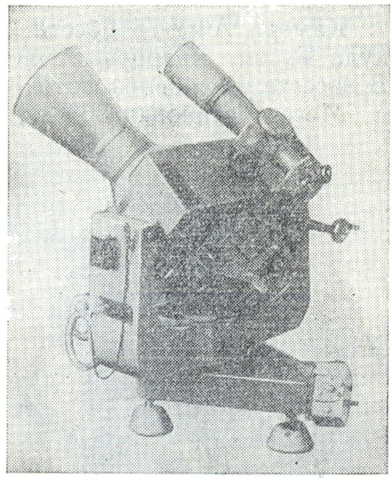

Рис. 31. Камера АФУ-75

В фокальной плоскости камеры установлен механизм компенсации сдвига изображения спутника. Механизм компенсации представляет собой металлическую раму. В ней закреплено плоскопараллельное стекло. К удаленной от объектива поверхности стекла, являющейся фокальной плоскостью, при помощи металлической пластины прижимается пленка. При помощи синхронного двигателя рамка с пленкой может перемещаться по направляющим через 3, 6, 12 или 18 мм (общее перемещение 36 мм).

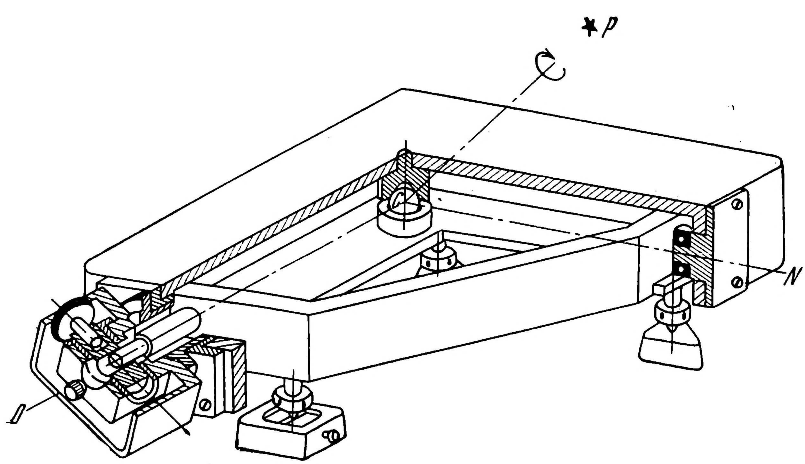

Рис. 32. Экваториальная платформа камеры АФУ-75

Аналогичный синхронный двигатель приводит в движение телескоп-гид.

В кассете помещается 29 м пленки (110 негативов) шириной 190 мм.

Камера АФУ-75 обеспечена автономной службой времени, куда входят кварцевые часы, осциллограф и радиоприемник. В кассете установлен фотохронограф.

Масса установки 350 кг, габариты 1,5×3 м, электропитание от сети 220 В, 50 Гц, необходимая мощность 2 кВт.

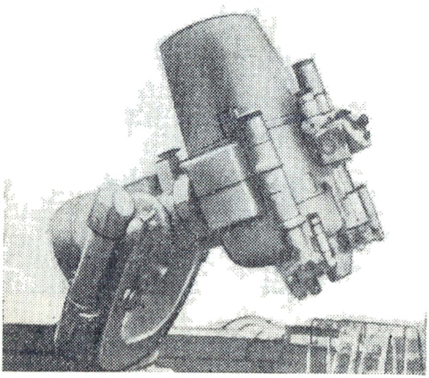

Рис. 33. Камера ВАУ

С помощью камеры можно фотографировать активные ИСЗ, яркие пассивные ИСЗ, спутники малой яркости как быстрые, так и медленные. Для каждого случая отработаны определенные режимы работы камеры. Таким образом, АФУ-75 позволяет фотографировать спутники от 3 до 10 звездной величины, захватывая до 120° видимой дуги орбиты.

Камеры АФУ-75 используются для наблюдений в СССР, ЧССР, НРБ, МНР, ВНР, на Кубе, в АРЕ, Сомали и ряде других стран.

Камера ВАУ (СССР) предназначена для наблюдений спутников и далеких искусственных небесных тел. Камера ВАУ (рис. 33) имеет трехосную экваториальную монтировку, что позволяет отслеживать движение спутника. Одна ось — часовая — направлена в полюс мира, вторая — ось склонений — позволяет ориентировать третью орбитальную ось в точку с любым склонением. Отслеживание может осуществляться со скоростями от 0 до 6000″ в сек. При этом камера вращается вокруг орбитальной оси со скоростью видимого движения спутника, а вокруг часовой оси — со скоростью суточного вращения небесной сферы.

Монтировка камеры позволяет получить опорные звезды в виде точек в непосредственной близости от изображения спутника и тем самым ослабить влияние деформации пленки. В этом заключается преимущество ВАУ перед камерой Бейкера-Нанна (США), описание которой будет дано ниже.

Объектив камеры «Астродар» рассчитан в Пулковской астрономической обсерватории Д. Д. Максутовым и М. А. Сосниной. Действующее отверстие объектива 500 мм, фокусное расстояние 700 мм, диаметр основного зеркала 1070 мм, эффективное относительное отверстие 1 : 1,8, поле зрения 5×30°. Фокальная поверхность сферическая. Фотографирование производится на пленку шириной 70 мм, формат кадра 60×360 мм. Имеются два затвора: обтюраторный и створчатый. Обтюраторный затвор позволяет получать прерывистые следы спутника или звезд и обеспечивает временную привязку. Створчатый затвор ограничивает число штрихов на снимке.

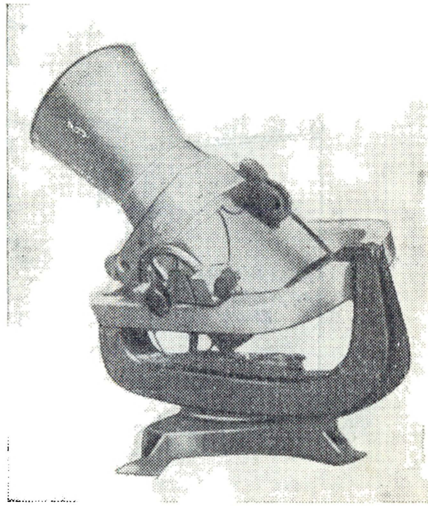

Рис. 34. Камера Бейкера-Нанна

Камера снабжена тремя визирами со сменными увеличениями 25, 50 и 100^{x} (поле зрения соответственно 2°40′, 1°24′ и 52′) и фотогидами. Работа камеры автоматизирована. Управление работой осуществляется с центрального пульта на основе заранее составленной программы наблюдений. Программное устройство позволяет фотографировать спутник в 12 точках видимой траектории в автоматическом режиме.

Служба времени состоит из двух кварцевых генераторов, трех параллельно работающих делителей частоты, радиоприемника, блока электронной школы времени, электронных часов, механических часов и электроннолучевой трубки. Два генератора дублируют друг друга. Частота генераторов 5 мГц, стабильность частоты $1 \cdot 10^{-8}$ за 48 ч непрерывной работы. Наличие развертки электроннолучевой трубки позволяет отсчитывать время до 0,0001^{s}.

Работая в разных режимах, камерой можно фотографировать слабые спутники, имеющие быстрое движение, яркие спутники, слабые медленные спутники, космические зонды и другие далекие космические объекты. Выбор режима фотографирования обусловлен яркостью и скоростью движения объекта. Камерой могут наблюдаться спутники до 12^{m}.

Камера Бейкера-Нанна (США) была первой большой спутниковой следящей камерой (создана в 1956—1957 гг.). Она имеет трехосную монтировку (рис. 34)и может отслеживать движение спутника по дуге большого круга со скоростями от 0 до 7000″в сек. Оптическая система камеры может быть отнесена к модифицированной системе Шмидта (рис. 35). Диаметр действующего отверстия 51 см, фокусное расстояние 51 см, поле зрения 30×5°, фокальная поверхность — сферическая. Обтюратор, установленный перед фокальной поверхностью, прерывает следы звезд и спутника, затвор регулирует продолжительность экспозиции и задает ее начало. На начальном этапе эксплуатации камеры для временной привязки применялись кварцевые часы Нормана, замененные в 1965—1966 гг. атомными, что позволило обеспечивать точность в 0,0001^s. Камера

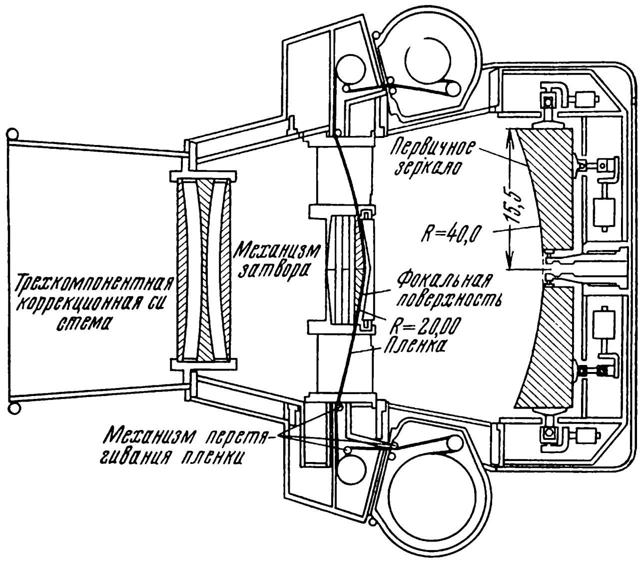

Рис. 35. Оптическая система камеры Бейкера-Нанна

может работать в разных режимах, выбор которых зависит от яркости и скорости движения спутника.

Систематические обширные наблюдения, выполненные на 12 станциях камерами Бейкера-Нанна, послужили ученым SAO для вывода геодезических параметров «Стандартной Земли 1966».

Камера SBG (Satellitenbeobachtungsgerät, ГДР) изготавливается фирмой К. Цейсс, Йена. Конструктор камеры М. Штейнбах. Камера имеет четырехосную монтировку (рис. 36). Две оси образуют обычную азимутальную установку и позволяют направлять в полюс орбиты спутников третью ось. Наличие четвертой оси дает возможность отслеживать движение спутника по малому кругу, так как камера может отклоняться от перпендикуляра к третьей оси. Оптическая система камеры является системой Шмидта (рис. 37). Диаметр входного отверстия 425 мм, фокусное расстояние 760 мм, диаметр коррекционной пластинки 150 мм. Имеется телескоп-гид. В отличие от камер, рассмотренных выше, фотографирование выполняется на пластинках размером 9×12 см. Слежение за спутниками может осуществляться автоматически, по заданию на перфоленте, выдаваемой специальной ЭВМ. При этом, кроме движения самой камеры, используется движение кассеты с пластинкой. В результате отслеживания спутник получается на снимке в виде точки, а звезды — в виде штрихов.

Камера позволяет фотографировать объекты, яркость которых составляет $10—12^m$.

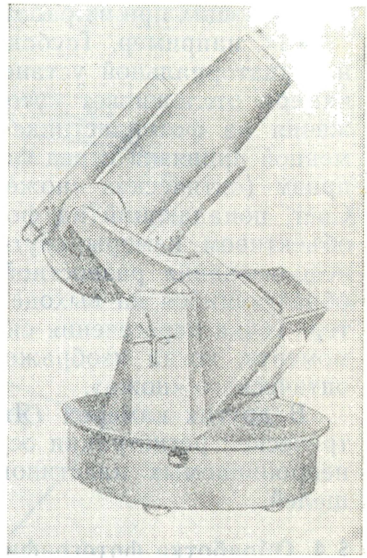

Рис. 36. Камера SBG

Камера «Антарес» (Франция) создана в 1967 г. по проекту П. Мюллера. Монтировка камеры экваториальная. Камера и гиды установлены на платформе, которая может вращаться вокруг третьей оси со скоростью от 2 до 7000″ в сек. Можно наклонять ось камеры от перпендикуляра к третьей оси на угол до 6°. Объектив камеры шестилинзовый, его диаметр 300 м, фокусное расстояние 900 мм. Имеется обтюратор, который прерывает следы спутника и звезд и обеспечивает регистрацию времени наблюдений до $0{,}0001^s$. Размер кадра 18×18 см (11×11°). При работе неподвижной камерой получались изображения спутников до $5{,}5^m$ звездной величины. В режиме слежения камера обеспечивала наблюдения спутников Diademe, имеющих 9-звездную величину.

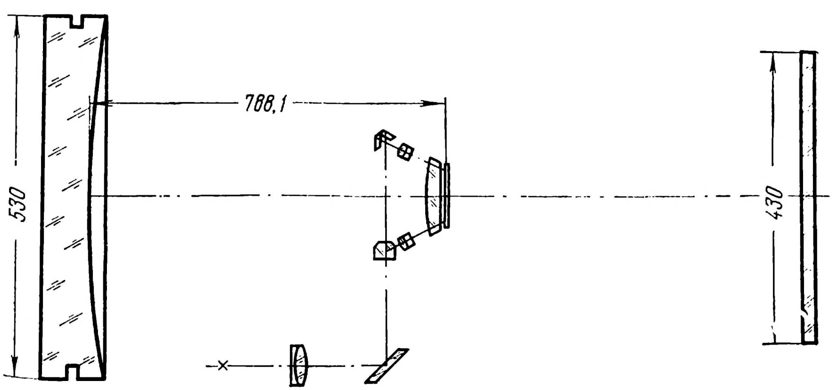

Рис. 37. Оптическая система камеры SBG

Не лишены перспективы методы наблюдений спутников, основанные на использовании фотоэлектрического эффекта. Особенно важное значение имеет возможность избавиться от обтюраторов при фиксировании моментов наблюдений и таким образом исключить влияние всякого рода механических ошибок, возникающих при их работе.

Так, например, Тсубокава (Япония) сконструировал камеру на экваториальной установке ($F=100$ см, $D=20$ см). Так как камера отслеживает суточное движение звезд, то их изображения на фотопластинке получаются в виде точек. Для временной привязки перед фотопластинкой устанавливается девять призм (оптических «ножей») с фотоумножителями по бокам. Свет, попадающий на фотоумножители от движущегося перед объективом камеры спутника, создает фототок. В результате использования разностной схемы включения фотоумножителей образующийся на выходе сигнал имеет синусоидальный характер. Точка пересечения синусоиды с осью абсцисс соответствует моменту, когда изображение спутника находится на «лезвии» оптического «ножа».

В других камерах (Япония, Англия) применение фотоэлектрической регистрации осуществляется с использованием светонепроницаемых пластинок с системой нанесенных на них щелей.

§ 4. Обработка фотографических наблюдений

Изображение участка звездного неба на снимке, полученном при помощи фотографической спутниковой камеры, является центральной проекцией фотографируемой области из второй главной точки объектива на плоскость снимка. Большие круги небесной сферы изображаются на снимке прямыми линиями.

Пусть первая и вторая главные точки объектива совпадают и обозначены на рис. 38 O_1. Построим с центром в этой точке небесную сферу радиусом, равным фокусному расстоянию F. Пересечение перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на плоскость снимка, называется оптическим центром снимка (точка O). Допустим, что снимок касается построенной небесной сферы в точке O, т. е. $O_1O=F$. Если на небесной сфере в точке S' находится звезда (спутник), то ее изображение на снимке будет находиться в точке S.

Точка O' на небесной сфере соответствует оптическому центру снимка. Из рис. 38 следует зависимость между угловым расстоянием звезды от точки O' (σ) и линейным расстоянием (s) между соответствующими точками (S и O) на снимке

$$s = F\operatorname{tg}\sigma, \tag{IV.4}$$

Зависимость (IV.4) называется *законом тангенса*. Этот закон выполняется только приближенно из-за влияния ошибок объектива, дифференциальной рефракции, дифференциальной аберрации, атмосферной дисперсии, внешней среды и уравнения яркости.

Основными ошибками (аберрациями) объектива являются: *сферическая аберрация, кома, дисторсия, астигматизм и кривизна поля, хроматическая аберрация* и *призматичность объектива*. Влияние аберраций увеличивается с удалением от оптической оси (оптического центра на снимке) и с возрастанием светосилы объектива. Большинство аберраций устраняется использованием специальных конструкций оптических систем и их тщательным научным расчетом.

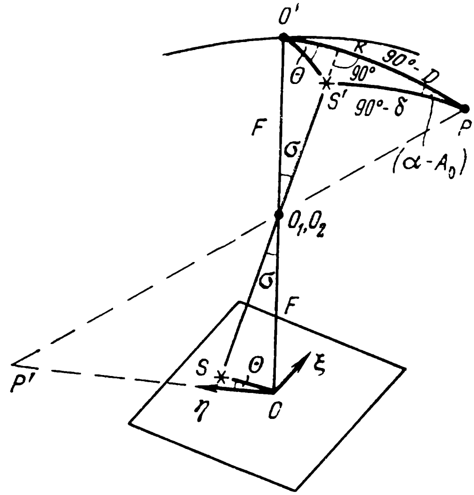

Рис. 38. К установлению зависимости между экваториальными и идеальными координатами

Наибольшую опасность для фотографических наблюдений из неисправленных аберраций имеет дисторсия. Дисторсия заключается в нарушении центральной проекции для поля изображения на снимке. Из-за влияния дисторсии вместо закона тангенса (IV.4) зависимость между s и σ выражается формулой

$$s = F\operatorname{tg}\sigma + \nu_1 \operatorname{tg}^3\sigma + \nu_2 \operatorname{tg}^5\sigma + \ldots, \qquad \text{(IV.5)}$$

где ν_1 и ν_2 — коэффициенты дисторсии. При наблюдениях спутников, как правило, бывает достаточно сохранять в формуле (IV.5) лишь два члена. Чтобы иметь возможность исправлять результаты наблюдений поправками за дисторсию, значение коэффициента ν_1 определяют из специальных исследований.

Измерение негативов, полученных при наблюдениях спутников, производится на координатно-измерительных приборах типа УИМ, КИМ, СИП, «Комесс», «Аскорекорд» и др. Инструментальная точность измерений на этих приборах составляет 1,0—1,5 мкм. Негатив помещается в измерительном приборе так, чтобы эмульсионный слой был повернут в сторону объектива измерительного микроскопа. В результате измерений получают положение опорных звезд и спутника на снимке в некоторой прямоугольной системе координат x, y. Эти координаты принято называть *измеренными*. Ориентация снимка в координатно-измерительном приборе, а следовательно, и система координат x, y могут быть, вообще говоря, произвольными. Однако удобнее за ось x принять прямую, параллельную следу спутника на снимке. В качестве начала координат системы x, y может быть принят геометрический центр снимка.

Положение спутника на снимке получается с ошибкой порядка 1,6 мкм, если используются пластинки, и 2,3—3,0 мкм, если он фотографируется на пленку. Положение звезд получаются несколько точнее. В настоящее время в практику обработки фотографических наблюдений внедряются автоматические измерительные машины. В них микроскоп снабжается фотоэлектрической насадкой с фотоэлементом. В зависимости от плотности изображения возникающий в фотоэлементе ток имеет разную амплитуду. Соответствующие сигналы подаются на моторы, перемещающие микроскоп и снимок до тех пор, пока не будет выполнено наведение на объект. Результаты измерений, преобразованные в координаты x и y, пробиваются на перфокарты или перфоленту. Применяя автоматическую измерительную машину, можно уменьшить ошибку наведения в 2—3 раза и определять положение ИСЗ с ошибкой 0,5 мкм. Кроме того, обработка происходит гораздо быстрее.

Связь идеальных координат с экваториальными. По измеренным на снимке прямоугольным координатам x, y звезд и спутника, а также по известным из звездного каталога координатам (α_i и δ_i) опорных звезд необходимо определить экваториальные топоцентрические координаты спутника (α_c и δ_c). Для решения этой задачи вводится специальная система координат ξ и η. Эти координаты разные авторы называют *идеальными*, *стандартными* и *тангенциальными*. Впервые их ввел для обработки фотографических наблюдений английский астроном Тернер в 1893 г. В идеальной системе (см. рис. 38) началом является оптический центр снимка. Ось η совпадает с изображением на снимке круга склонений, ось ξ ей перпендикулярна. Направления осей ξ и η соответствуют возрастанию прямых восхождений и склонений.

Для установления связи между экваториальными и идеальными координатами покажем на небесной сфере (см. рис. 38) положение полюса мира и обозначим координаты оптического центра O через A_0 и D_0. Будем считать, что закон тангенса строго соблюдается, а искажения, вносимые фотографическим методом, учтем позднее (при переходе от идеальных координат к измеренным).

В единицах фокусного расстояния в соответствии с рис. 38 имеем

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \operatorname{tg}\sigma\sin\theta\\ \eta &= \operatorname{tg}\sigma\cos\theta\end{aligned}\right\}. \tag{IV.6}$$

Для сферического треугольника $PO'S'$ можем записать группу формул

$$\left.\begin{aligned}\cos\sigma &= \sin\delta\sin D_0 + \cos\delta\cos D_0\cos(\alpha - A_0)\\ \sin\sigma\sin\theta &= \cos\delta\sin(\alpha - A_0)\\ \sin\sigma\cos\theta &= \sin\delta\cos D_0 - \cos\delta\sin D_0\cos(\alpha - A_0)\end{aligned}\right\}. \tag{IV.7}$$

Разделим второе и третье уравнения на первое и подставим полученные значения $\operatorname{tg}\sigma\sin\theta$ и $\operatorname{tg}\sigma\cos\theta$ в (IV.6), тогда

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{\cos\delta\sin(\alpha - A_0)}{\sin\delta\sin D_0 + \cos\delta\cos D_0\cos(\alpha - A_0)} =\\ &= \frac{\operatorname{ctg}\delta\sin(\alpha - A_0)}{\sin D_0 + \operatorname{ctg}\delta\cos D_0\cos(\alpha - A_0)}\\ \eta &= \frac{\sin\delta\cos D_0 - \cos\delta\sin D_0\cos(\alpha - A_0)}{\sin\delta\sin D_0 + \cos\delta\cos D_0\cos(\alpha - A_0)} =\\ &= \frac{\cos D_0 - \operatorname{ctg}\delta\sin D_0\cos(\alpha - A_0)}{\sin D_0 + \operatorname{ctg}\delta\cos D_0\cos(\alpha - A_0)}\end{aligned}\right\}. \tag{IV.8}$$

Опустим из точки S' (см. рис. 38) сферический перпендикуляр на сторону $O'P$. Склонение основания этого перпендикуляра K обозначим q. Из треугольника $S'KP$ следует

$$\operatorname{ctg} q = \operatorname{ctg}\delta\cos(\alpha - A_0). \tag{IV.9}$$

С учетом (IV.9) из формул (IV.8) после несложных преобразований получим идеальные координаты звезды S'

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{\operatorname{ctg} q\operatorname{tg}(\alpha - A_0)}{\cos(q - D_0)}\\ \eta &= \operatorname{tg}(q - D_0)\end{aligned}\right\}. \tag{IV.10}$$

Получим формулы для перехода от идеальных координат (ξ и η) к экваториальным (α и δ) при условии, что известны значения A_0 и D_0. Из формул (IV.8) получаем

$$\left.\begin{aligned}\xi\sin D_0 + \xi\operatorname{ctg}\delta\cos D_0\cos(\alpha - A_0) &= \operatorname{ctg}\delta\sin(\alpha - A_0)\\ \eta\sin D_0 + \eta\operatorname{ctg}\delta\cos D_0\cos(\alpha - A_0) &= \cos D_0 -\\ &- \operatorname{ctg}\delta\sin D_0\cos(\alpha - A_0)\end{aligned}\right\}. \tag{IV.11}$$

После деления второй формулы на $\cos D_0$ и элементарных преобразований имеем

$$\operatorname{ctg}\delta\cos(\alpha - A_0) = \frac{1 - \eta \operatorname{tg} D_0}{\eta + \operatorname{tg} D_0}. \tag{IV.12}$$

С учетом этого соотношения из первой формулы (IV.11) получим

$$\operatorname{ctg}\delta\sin(\alpha - A_0) = \frac{\xi \sec D_0}{\eta + \operatorname{tg} D_0}. \tag{IV.13}$$

Сначала по формуле

$$\operatorname{tg}(\alpha - A_0) = \frac{\xi \sec D_0}{1 - \eta \operatorname{tg} D_0} \tag{IV.14}$$

находим α, а далее по (IV.12) или (IV.13) — δ.

Специальными исследованиями было установлено, что координаты оптического центра A_0 и D_0 надо знать с точностью, по крайней мере, на порядок ниже заданной точности идеальных координат. Основой для такого вывода послужили формулы, выражающие ошибки координат ξ и η как функцию ошибок ΔA_0 и ΔD_0. Эти формулы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \Delta\xi &= \xi(\Delta A_0 \cos D_0 \xi + \Delta D_0 \eta) \\ \Delta\eta &= \eta(\Delta A_0 \cos D_0 \xi + \Delta D_0 \eta) \end{aligned}\right\}. \tag{IV.15}$$

Следует иметь в виду, что ξ и η — малые величины.

Связь идеальных и измеренных координат устанавливается *уравнениями Тернера*, которые учитывают несовпадение начал и взаимный разворот осей идеальных (ξ, η) и измеренных (x, y) координат, обусловленные любыми причинами.

Уравнения Тернера представляют аффинное преобразование и выражаются в известной из аналитической геометрии форме

$$\left.\begin{aligned} \xi - x &= ax + by + c \\ \eta - y &= dx + ey + f \end{aligned}\right\}, \tag{IV.16}$$

где a, b c, d, e, f — постоянные снимка (коэффициенты уравнений Тернера).

Постоянные Тернера находят из решения уравнений (IV.16) или составленных на их основе нормальных уравнений при числе звезд более трех. Обычно при обработке спутниковых наблюдений соотношения вида (IV.16) обеспечивают необходимую точность.

Если получаемая с помощью уравнений (IV.16) точность недостаточна, то учитываются члены второго порядка *(обобщенный способ Тернера)*,

$$\left.\begin{aligned} \xi - x &= ax + by + c + a'x^2 + b'xy + c'y^2 + \ \ldots \\ \eta - y &= dx + ey + f + d'x^2 + e'xy + f'y^2 + \ \ldots \end{aligned}\right\}. \tag{IV.17}$$

Кроме приведенных формул Тернера, являющихся классическими в фотографической астрометрии, могут использоваться для вычислений формулы других авторов, например Ф. Шлезингера [35], А. Н. Дейча [19], А. А. Киселева [31]. Вопрос о выборе надлежащих формул решается в зависимости от особенностей задачи и требований к точности. За рубежом широко применяются фотограмметрические методы обработки снимков [39].

Обычно при обработке фотографических наблюдений ИСЗ в качестве опорных используется от 6 до 10 звезд. Однако этот вопрос требует проведения специальных исследований с учетом всех влияющих на точность факторов. Исследования должны проводиться для каждого типа спутниковых фотографических камер.

В заключение параграфа кратко укажем порядок вычисления топоцентрических координат ИСЗ по результатам фотографических наблюдений.

1. Отождествление звезд на снимке с помощью звездных атласов.

2. Выборка из звездного каталога координат опорных звезд α_0 и δ_0. В качестве такого каталога используют FK-4, AGK-3, звездный каталог SAO, GC и т. д.

3. Приведение α_0 и δ_0 от эпохи каталога на момент наблюдений.

4. Определение по опорным звездам с известными координатами положения геометрического центра снимка. Взаимное положение оптического и геометрического центров должно быть известно из специальных исследований.

5. Измерение на снимке при помощи координатно-измерительной машины прямоугольных координат звезд x_i, y_i и спутника x_c и y_c. Исправление их за ошибки прибора.

6. Переход по формулам (IV.10) от экваториальных координат звезд к их идеальным координатам (ξ_i, η_i).

7. Составление для звезд уравнений вида (IV.16) и определение постоянных Тернера.

8. Учет влияния дисторсии можно осуществлять при помощи формул [46]

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= -c(x-x_0)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2] \\ \Delta y &= -c(y-y_0)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2] \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(IV.18)}$$

где $c=\nu_1/F^{-3}$; x_0, y_0 — координаты оптического центра.

9. Составление уравнений Тернера (IV.16) для спутника и вычисление ξ_c, η_c.

10. Вычисление по формулам (IV.12)—(IV.14) топоцентрических экваториальных координат спутника.

При дальнейших исследованиях вычисленные топоцентрические экваториальные координаты α_c и δ_c используются как измеренные величины.

Топоцентрическое прямое восхождение α_c определяет поверхность положения

$$\alpha_c = \operatorname{arc\,tg} \frac{y_c}{x_c}. \tag{IV.19}$$

Уравнение (IV.19) есть уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости экватора.

Топоцентрическое склонение δ_c определяет поверхность положения

$$\delta_c = \operatorname{arc\,tg} \frac{z_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}. \tag{IV.20}$$

Уравнение (IV.20) есть уравнение конуса, ось которого проходит через пункт наблюдений, параллельно оси вращения Земли.

§ 5. Поправка за фазу спутника

Поправка за фазу учитывается при фотографических наблюдениях спутников-баллонов типа «Эхо». Значение вектора пункт — центр спутника в этом случае можно получить по формуле

$$\boldsymbol{a} = \frac{\bar{a} + \dfrac{R_S}{r} \cdot \dfrac{\bar{a} - \bar{r}_{\odot}}{|\bar{a} - \bar{r}_{\odot}|}}{\left| \bar{a} + \dfrac{R_S}{r} \cdot \dfrac{\bar{a} - \bar{r}_{\odot}}{|\bar{a} - \bar{r}_{\odot}|} \right|}, \tag{IV.21}$$

где $\bar{a}$ — вектор положения спутника, полученный из наблюдений, $\bar{r}_{\odot}$ — радиус-вектор Солнца. Оба вектора даются в мгновенной экваториальной геоцентрической системе координат, R_S — радиус спутника, r — расстояние до него. Приведем без вывода формулы для вычисления поправок за фазу в экваториальные координаты [3]:

$$\Delta\alpha_{\Phi} = \frac{1}{\cos\delta\cos\alpha} [\delta y_a + \operatorname{tg}\delta \sin\alpha\, \delta z_a], \tag{IV.22}$$

$$\Delta\delta_{\Phi} = \frac{1}{\cos\delta} \delta z_a, \tag{IV.23}$$

где

$$\begin{vmatrix} \delta x_a \\ \delta y_a \\ \delta z_a \end{vmatrix} = \boldsymbol{a} - \bar{a}. \tag{IV.24}$$

§ 6. Допплеровские наблюдения

Из радиоэлектронных методов наблюдений искусственных спутников наибольшее распространение получил метод, основанный на использовании эффекта Допплера. Применяющаяся при этом аппаратура является сравнительно простой и обеспечивает более высокую точность по сравнению с радиоинтерференционным методом и непосредственным измерением расстояний.

При допплеровских наблюдениях различают *запросный* и *беззапросный способы,* а также системы, работающие по отраженному от поверхности объекта сигналу.

В запросном способе сравнивают частоты излучаемого и переизлучаемого с помощью помещенного на спутнике приемоответчика колебаний.

Суть беззапросного допплеровского способа состоит в следующем.

Бортовой передатчик излучает колебания высокостабильной частоты. Эти колебания принимаются находящимся на Земле приемником и их частота сравнивается с частотой эталонного генератора. В случае равномерного и прямолинейного перемещения передатчика относительно пункта наблюдений соотношение между f_1 (частота бортового передатчика) и f_2 (принимаемая на пункте частота) будет выражаться формулой

$$f_2 = f_1 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V_r}{c}}, \qquad \text{(IV.25)}$$

где $V_r = \frac{dr}{dt}$ — радиальная скорость перемещения передатчика, c — скорость света в вакууме.

В случае ускоренного движения объекта с передатчиком на борту, а также учитывая разность гравитационных потенциалов, следует вместо (IV.25) использовать

$$f_2 = f_1 \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V_r}{c}} + \frac{u_1 - u_2}{c^2} + \frac{gR_\oplus}{c^2} \sqrt{\frac{d^2r}{dt^2} \cdot \frac{1}{g}} \right), \qquad \text{(IV.26)}$$

где $R_\oplus$ — радиус Земли. Так как ИСЗ движутся сравнительно близко от Земли и наблюдения происходят на коротком интервале времени, не возникает необходимости использовать (IV.26).

Если (IV.25) разложить в ряд по степеням $\frac{V_r}{c}$, то с учетом соотношения $V_r = V\cos\psi$ получим

$$f_2 = f_1\left[1 - \frac{V}{c}\cos\psi - \frac{V^2}{c^2}\left(\frac{1}{2} - \cos^2\psi\right)\right]. \qquad \text{(IV.26,а)}$$

В (IV.27) ψ — угол между векторами относительной скорости $\overline{V}$ и радиальной скорости $\overline{V}_r$.

В соответствии с (IV.26, *а*), ограничиваясь двумя первыми членами разложения в ряд, получаем так называемый допплеровский сдвиг частоты

$$\Delta f = f_2 - f_1 = -f_1\frac{V_r}{c} = -\frac{V_r}{\lambda}. \qquad \text{(IV.26,б)}$$

Ограничение числа членов ряда (IV.26, *а*) приводит к ошибке

$$\Delta V_r = \frac{c}{f_1}\,\delta(\Delta f) = -\frac{V^2}{c}\left(\frac{1}{2} - \cos^2\psi\right).$$

Измерительная аппаратура на наземной станции дает числовые характеристики n, равные числу периодов допплеровского сигнала за некоторый малый интервал времени τ (обычно несколько сек). Между n и Δf имеет место соотношение

$$\Delta f = \frac{n}{\tau}. \qquad \text{(IV.26,в)}$$

На основании (IV.26, *б*) и (IV.26, *в*), если характеристика n относится к среднему моменту интервала, можно получить значение радиальной топоцентрической скорости

$$V_r = \frac{c}{f_1\tau}\,n. \qquad \text{(IV.26,г)}$$

Разность частот, зафиксированная на наземной станции в виде числовых характеристик n, можно связать функционально с разностью расстояний до спутника за время τ

$$\Delta r = \frac{c}{f_1}\,n. \qquad \text{(IV.26,д)}$$

Для получения разности расстояний Δr в соответствии с формулой (IV.26, д) используется интегральный приемник допплеровской частоты, в котором происходит интегрирование измеренных уклонений принятых частот от эталонной частоты.

Запросный метод не нашел применения при точных наблюдениях спутников, но успешно применяется при наблюдениях далеких КЛА.

Принципиальную постановку задачи в способе, основанном на использовании эффекта Допплера, рассмотрим на примере *«траверзного» метода*. «Траверзный» метод был разработан под руководством акад. В. А. Котельникова для определения орбит первых советских спутников.

Допустим, что ИСЗ движется с постоянной скоростью V_0 по прямой относительно пункта наблюдений M (A — есть точка траверза, рис. 39), т. е. $MA = r_0$ — есть наименьшее расстояние от спутника до пункта наблюдений при данном прохождении.

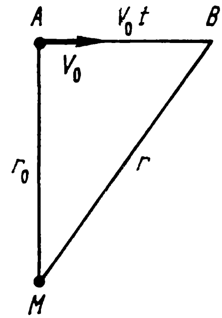

Рис. 39. Движение ИСЗ относительно пункта наблюдений (к теории «траверзного» метода)

Расстояние до точки B, в которой спутник окажется через время t после прохождения траверза, в соответствии с рис. 39 равно

$$r = \sqrt{r_0^2 + V_0^2 t^2}. \qquad \text{(IV.27)}$$

Радиальная топоцентрическая скорость спутника при этом равна

$$V_r = \frac{V_0^2 t}{\sqrt{r_0^2 + V_0^2 t^2}}. \qquad \text{(IV.28)}$$

С учетом этой формулы выразим допплеровский сдвиг частоты, зафиксированный на Земле в пункте наблюдений

$$\Delta f = -\frac{V_r}{\lambda} = -\frac{V_0^2 t}{\lambda\sqrt{r_0^2 + V_0^2 t^2}}, \qquad \text{(IV.29)}$$

где λ — длина волны.

Формулу (IV.29) можно преобразовать к виду

$$\frac{V_0^2 t^2}{\lambda^2 \Delta f^2} - t^2 - \frac{r_0^2}{V_0^2} = 0. \qquad \text{(IV.30)}$$

Уравнение (IV.30) есть уравнение прямой. Если его отнести к системе координат x, y, то нетрудно сообразить, что надо положить

$$\left.\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= \frac{t^2}{\Delta f^2} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(IV.31)}$$

Прямая (IV.30) отсекает на координатных осях отрезки

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{r_0^2}{V_0^2} \\ y_0 &= \frac{\lambda^2 \cdot r_0^2}{V_0^4} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(IV.32)}$$

Таким образом, в рассматриваемом методе по измеренному допплеровскому сдвигу частоты можно получить значение относительной скорости спутника V_0 и расстояние до него r_0 в момент прохождения траверза.

Графическое решение задачи выполняется следующим образом. Пусть имеем систему координат, в которой по оси абсцисс откладываем время, а по оси ординат — частоту принимаемых в пункте наблюдений сигналов f_2, причем $f_2=f_1+\Delta f$ (рис. 40).

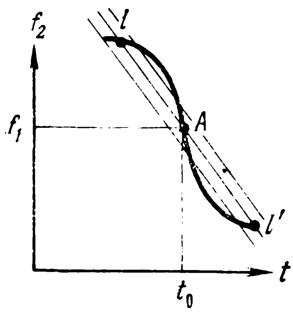

Рис. 40. Графическое решение в «траверзном» методе допплеровских наблюдений

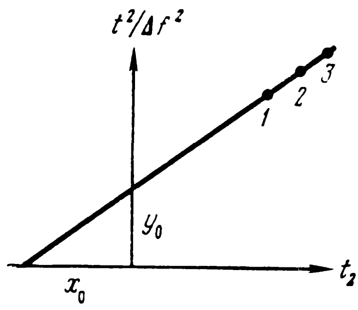

Рис. 41. Получение x_0 и y_0 для последующего вычисления V_0 и r_0 в допплеровском методе

Полученная кривая симметрична относительно точки с координатами (t_0, f_1), соответствующими прохождению спутником траверза. Точку $A(t_0, f_1)$ находим на графике, проводя секущие и выбирая ту из них, для которой $Al=Al'$.

Получив f_1, находим ряд значений $\Delta f=f_2-f_1$ для моментов t_i, по этим данным проводим прямую (рис. 41) и определяем x_0 и y_0. Далее, используя формулы (IV.32), вычисляем искомые неизвестные:

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= \lambda\sqrt{\frac{x_0}{y_0}} \\ r_0 &= \frac{\lambda x_0}{\sqrt{y_0}} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(IV.33)}$$

Результаты, полученные допплеровским методом, содержат ошибки, обусловленные действием *ионосферной рефракции, тропосферной рефракции и релятивистского эффекта.* Двумя последними влияниями часто пренебрегают. Для ослабления влияния ионосферной рефракции передачу сигналов со спутника ведут на двух когерентных частотах. Частоты, принимаемые на пункте, можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} f_{\mathrm{I}} &= F_{\mathrm{I}} + \Delta f_{\mathrm{I}} + k/F_{\mathrm{I}} + \Delta_{\mathrm{I}} \\ f_{\mathrm{II}} &= F_{\mathrm{II}} + \Delta f_{\mathrm{II}} + k/F_{\mathrm{II}} + \Delta_{\mathrm{II}} \end{aligned}\right\}, \tag{IV.34}$$

где f — принятые частоты, F — излучаемые частоты, Δf — допплеровский сдвиг частоты, Δ — поправки за аппаратурные и внешние влияния, k/F — поправки за ионосферную рефракцию.

После выравнивания частот в приемной аппаратуре на регистрирующее устройство подается смешанная частота, причем влияние ионосферной рефракции исключается:

$$f_{\mathrm{I}} - \frac{3}{8} F_{\mathrm{II}} = F_{\mathrm{I}} + \Delta f_{\mathrm{I}} - \frac{9}{64} (F_{\mathrm{I}} + \Delta f_{\mathrm{I}}) + k/F_{\mathrm{I}} - \frac{3/8k}{3/8F_{\mathrm{I}}} +$$

$$+ \Delta_{\mathrm{I}} + \Delta_{\mathrm{II}} = \frac{55}{64} (F_{\mathrm{I}} + \Delta f_{\mathrm{I}}) + \Delta_{\mathrm{I}} + \Delta_{\mathrm{II}}. \tag{IV.35}$$

Для ослабления влияния тропосферной рефракции включают в обработку наблюдения, выполненные при высоте спутника над горизонтом $h \geqslant 15$, так как максимальное влияние тропосфера оказывает при нахождении спутника в горизонте. Результаты наблюдений следует также исправлять поправкой за тропосферную рефракцию. При этом можно воспользоваться формулой [67]

$$\delta n = 2{,}8 \cdot 10^{-3} \frac{f_1}{c} \left[\frac{1}{\sin h_2} - \frac{1}{\sin h_1} \right], \tag{IV.35,a}$$

где h_1 и h_2 — высоты спутника над горизонтом в начале и конце счетного интервала τ.

В результаты допплеровских измерений вводится также поправка за счет так называемой ошибки «частотной подставки», которая обусловлена характером работы бортовой и наземной аппаратуры (нестабильность работы генераторов, различные «шумы» и т. д.).

Отметим, что частотной подставкой называется разность частот опорных сигналов f_0, которые вырабатываются на пункте наблюдений высокостабильным генератором, и сигналов, посылаемых на Землю бортовым передатчиком f_1.

Примером практической реализации допплеровского метода является действующая в США навигационная спутниковая система Transit. Спутники этой системы ведут непрерывную передачу когерентных частот 400 МГц и 150 МГц. Работа бортового кварцевого генератора характеризуется величиной постоянного сдвига частоты порядка $2\text{—}20 \cdot 10^{-11}$ за сутки и случайными вариациями, достигающими $3\text{—}7 \cdot 10^{-11}$ за 1 сек. Постоянный сдвиг частоты определяется как дополнительный параметр при обработке измерений. Измерения частот на станциях наблюдений начинаются после появления спутника над горизонтом и ведутся через каждые 2—4 сек, таким образом за одно прохождение получают несколько сотен измерений. Экспериментальная оценка метода показала, что координаты пунктов на поверхности Земли получаются с ошибкой 9 м.

Дальнейшее повышение точности допплеровских наблюдений связано с совершенствованием аппаратуры и методики наблюдений. Влияние ионосферной рефракции можно исключить практически полностью, если организовать передачу со спутника на трех когерентных частотах. Для ослабления влияния тропосферной рефракции следует наблюдать спутники на высотах более 10°, а также переходить к работе на более высоких частотах (например, допплеровский передатчик ИСЗ GEOS работал на частотах 162, 324, 972 МГц).

В настоящее время при измерении радиальной скорости достигают точности 1—3 см/сек, в перспективе возможно ее повышение на порядок.

Допплеровский метод находит широкое применение при изучении Луны и Марса с помощью космических аппаратов. Ценная информация получена по наблюдениям ИСЗ этим методом для изучения движения земных полюсов.

Если считать, что измеренной величиной в допплеровском методе является разность расстояний Δr, то получаемая при этом поверхность положения

$$\Delta r = [(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 + (Z - z_1)^2]^{1/2} - \\ - [(X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 + (Z - z_2)^2]^{1/2} \quad \text{(IV.36)}$$

будет являться гиперболоидом вращения.

§ 7. Интерференционный метод наблюдений спутников

Интерференционные системы содержат бортовой передатчик и несколько наземных фазовых пеленгаторов. Пусть в точках A_1 и A_2 земной поверхности, находящихся на расстоянии d, установлены антенны, на которые принимаются сигналы от передатчика спутника (рис. 42). Передатчик ИСЗ наводит в антеннах электродвижущую силу со сдвигом фаз

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2). \quad \text{(IV.37)}$$

Этот сдвиг фаз измеряется фазометром Φ (см. рис. 42), а так как r_1 и $r_2 \gg d$, то

$$\varphi \approx \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\alpha. \quad \text{(IV.38)}$$

Таким образом, измеряя сдвиг фаз, пеленгатор позволяет определить угловую координату, характеризующую направление на спутник,

$$\alpha = \arcsin \frac{\lambda}{2\pi d}. \qquad \text{(IV.39)}$$

Следует иметь в виду, что

$$\varphi = \theta + k, \qquad \text{(IV.40)}$$

где θ — целое число волновых циклов, которые фазометр не фиксирует и для определения которых используют другой интерферометр, обычно с меньшей базой, k — показания фазометра. Для определения θ можно также использовать предварительные данные об элементах орбиты.

Для того чтобы определить две угловые координаты, надо иметь пеленгатор с двумя парами антенн, установленными по возможности в перпендикулярных плоскостях (см. рис. 42). Основываясь на приведенных выше рассуждениях и в соответствии с чертежом на рис. 42, можно записать

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{1.2} &= \frac{2\pi}{\lambda} d_{1.2} \sin\alpha \cos\beta \\ \varphi_{3.4} &= \frac{2\pi}{\lambda} d_{3.4} \cos\alpha \cos\beta \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(IV.41)}$$

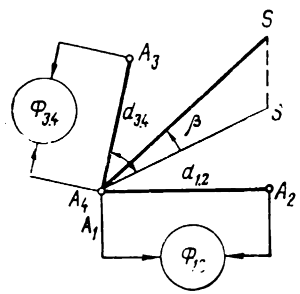

Рис. 42. Схема применения интерферометров для наблюдения спутников

Из этих соотношений находим

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\varphi_{1.2} d_{3.4}}{\varphi_{3.4} d_{1.2}}, \qquad \text{(IV.42)}$$

$$\beta = \arccos \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\varphi_{1.2}}{d_{1.2}}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_{3.4}}{d_{3.4}}\right)^2}. \qquad \text{(IV.43)}$$

На основании формулы (IV.39) ошибка определения одной из угловых координат спутника, обусловленная ошибкой измерения разности фаз, равна

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda}{2\pi d \cos\alpha} \Delta\varphi. \qquad \text{(IV.44)}$$

Учитывая, что разность фаз измеряется однозначно в интервале от 0 до 180°, находим зону однозначного определения угловых координат

$$\alpha_0 = 2 \arcsin \frac{\lambda}{2d}. \qquad \text{(IV.45)}$$

Как следует из формул (IV.44) и (IV.45), условия уменьшения $\Delta\alpha$ и увеличения α_0 противоречивы, поэтому обычно используется несколько пар антенн с разными базами d.

В качестве примеров действующих интерферометров можно привести системы Минитрек Прайм и Минитрек Марк II (Минитрек — система слежения минимального веса) в США. Каждая из 14 станций системы Минитрек Прайм включает 8 антенн. Калибровка аппаратуры выполняется путем фотографирования лампы-вспышки, установленной на самолете. Этот же самолет несет на борту радиопередатчик Минитрек.

Точность определения направлений интерференционной системой невысока, составляет 0,5—1,0′. Тем не менее представляет интерес рассмотреть сущность этого способа. Дело в том, что сейчас большую перспективу имеет развитие наблюдений с использованием радиотелескопов, образующих в паре радиоинтерферометр с большой базой. Объектами наблюдений при этом являются удаленные точечные радиоисточники. Такие наблюдения позволят уточнить размеры Земли и масштаб солнечной системы (астрономическую единицу), дадут материал для изучения дрейфа континентов и движения земных полюсов. В этих гигантских интерферометрах (с базой, соизмеримой с диаметром Земли) направления на объекты будут определяться с ошибкой порядка 0,001″ и точнее.

В конечном счете наблюдения с использованием интерферометра дают координаты, соответствующие азимуту и высоте объекта. В соответствии с этим имеем две поверхности положения:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \qquad \text{(IV.46)}$$

есть плоскость, проходящая через отвесную линию в точке наблюдений и перпендикулярная к плоскости горизонта;

$$\beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{(IV.47)}$$

есть поверхность конуса, ось которого совпадает с направлением упомянутой отвесной линии.

§ 8. Радиодальномерные наблюдения

Поскольку в комплект аппаратуры геодезических спутников входит фазовая дальномерная аппаратура, известная под названием SECOR (последовательное определение дальности), рассмотрим именно фазовый метод определения дальностей. В принципе возможно использование импульсного метода измерения дальностей, особенно если при этом используются сигналы сложной формы. Примером импульсной системы служит система контроля траекторий ракет «Миран».

В фазовых дальномерных системах расстояние от пункта наблюдений до спутника определяют путем измерения сдвига фаз между двумя колебаниями. Возможно построение фазового дальномера с ретрансляцией сигналов и измерением сдвига фаз на несущей частоте, с ретрансляцией сигналов и измерением сдвига фаз на частоте модуляции и с ретрансляцией сигналов и измерением сдвига фаз на частоте биений.

Немодулированное колебание мало пригодно для измерения дальности фазовым методом, так как при $r > 0{,}5\lambda$ в измерениях возникает неоднозначность. Для ее устранения сдвиг фаз измеряют на частоте модуляции. Величина сдвига при этом выражается формулой

$$\varphi = 4\pi \frac{r}{\lambda} + \varphi_{\Omega}, \qquad \text{(IV.48)}$$

где φ_{Ω} — сдвиг фаз на частоте Ω. Вообще говоря, для обеспечения однозначности необходимо, чтобы $\lambda_{\Omega} \geqslant 2r$, но в этом случае растет ошибка определения расстояния, так как

$$\Delta r = \frac{\lambda_{\Omega}}{4\pi} \Delta\varphi. \qquad \text{(IV.49)}$$

Применяя несколько частот модуляции, можно обеспечить однозначное и точное определение расстояния.

Метод, основанный на измерении разности фаз биений, сложен для практического применения.

В системе SECOR, реализованной в США, наземные станции излучают модулированные по фазе сигналы. Эти сигналы принимаются приемо-передатчиком, установленным на спутнике, и ретранслируются как фазовая модуляция с изменённой несущей частотой. Фазометры наземных станций измеряют разность фаз генерированного и принятого от ИСЗ сигнала, что необходимо для последующего определения расстояния.

Система SECOR состоит из четырех наземных станций и приемо-передатчика, установленного на спутнике. Три станции устанавливаются в пунктах с известными координатами, четвертая — на определяемом пункте. Работа системы происходит автоматически. Для однократного определения расстояния от ИСЗ до пункта требуется 50 мсек. Таким образом, если прохождение продолжается 7 мин, то на каждой станции имеем свыше 8000 наблюдений. Для обеспечения однозначности и ослабления ошибок, обусловленных влиянием электронной рефракции, измерения расстояний выполняются на четырех разнесенных модулированных частотах. Применение системы SECOR показало, что с ее помощью обеспечивается измерение расстояний до спутников с ошибкой порядка 5—10 м.

При наблюдениях геодезического спутника GEOS-2 использовались также радиолокаторы.

Ведутся работы по созданию спутниковых высотомеров, что имеет важное значение для изучения фигуры геоида в океанах и структуры гравитационного поля Земли. Один из таких высотомеров установлен и работает на запущенном в апреле 1975 г. спутнике GEOS-C. Ожидаемая точность характеризуется ошибкой $\pm 1{,}0$ м.

При измерениях топоцентрического расстояния до спутника получаем поверхность положения

$$r'^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad \text{(IV.50)}$$

Эта поверхность является сферой радиуса r' с центром в пункте наблюдений.

Комбинированные радиоэлектронные системы слежения за спутниками представляют собой комбинацию рассмотренных выше методов.

Система Микролок является сочетанием интерференционного и допплеровского методов (точность определения направлений $\sim 3'$).

Система Азуса — комбинация интерференционной и дальномерной систем (точность определения направляющих косинусов $3 \cdot 10^{-5}$, расстояний 10 м).

Система Мистрэм является комбинацией допплеровской и дальномерной систем.

Особый интерес для спутниковой геодезии представляет система GRARR, которая позволяет одновременно измерять дальности и радиальные скорости и которая уже испытывалась на спутниках GEOS-1 и GEOS-2. Точность этой системы предполагается довести до 6 м (по дальности) и 1 мм/сек (по радиальной скорости за 10 сек).

Предполагается объединение системы SECOR с допплеровской.

§ 9. Лазерные наблюдения

Лазерные установки используются для измерения расстояний до ИСЗ, а также для освещения ИСЗ при его фотографировании на фоне звездного неба. В последнем случае мощность излучения должна быть намного выше.

Для проведения лазерных наблюдений на спутнике должны быть установлены уголковые отражатели. Первым спутником, оснащенным такими отражателями, был Explorer 22, отраженные импульсы от него были зарегистрированы в США (21.I.1965) и Франции (24.I.1965 г.).

Лазерная установка (рис. 43) состоит из телескопа-передатчика, в который вмонтирован лазер, и телескопа-приемника. Последний включает узкополосный интерференционный фильтр, фотоумножитель и счетчик времени. Процесс измерений заключается в регистрации времени прохождения светового импульса до ИСЗ и обратно, следовательно,

$$r' = \frac{1}{2} c\tau. \qquad \text{(IV.51)}$$

Следует иметь в виду, что дальность действия лазерной установки прямо пропорциональна корню четвертой степени из величины излучаемой энергии, корню квадратному из диаметра действующего отверстия приемника и обратно пропорциональна корню квадратному из ширины луча.

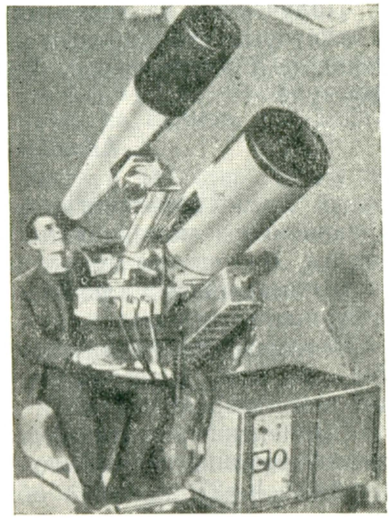

Рис. 43. Лазерная установка для наблюдений ИСЗ

В установках для наблюдений спутников использовался рубиновый лазер с $\lambda = 0{,}694$ мкм. Эти установки характеризуются следующими параметрами. Передатчик: длительность импульса от 10 до 60 нсек, энергия импульса от 0,5 до 7,5 Дж, выходная мощность от 10 до 500 мВт, ширина луча от 1 до 10′. Приемник: разрешающая способность от 1 до 10 нсек, апертура от 10 до 65 см, ширина луча от 1 до 30′, ширина фильтра от 10 до 25 Å.

При уменьшении ширины (расходимости) луча увеличивается дальность действия системы. Вместе с тем, при узком луче требуется более точная эфемерида спутника и возрастают требования к системе наведения и слежения. Кроме того, угловая ширина луча становится соизмеримой с отклонениями, вызванными турбулентными явлениями в атмосфере.

Измерение интервала времени τ, входящего в формулу (IV.51), выполняется с помощью счетчика циклов частоты 100 МГц или 1 Гц, который запускается в момент выхода лазерного импульса с передатчика и закрывается в момент поступления в приемник отраженного импульса.

Точность измерения дальности зависит в основном от трех факторов:

1) крутизны фронта и длительности возвратившегося от ИСЗ сигнала,

2) разрешающей способности счетчика импульсов,

3) надежности учета изменения скорости света в атмосфере.

При повышении мощности и сокращении длительности импульса достигается соответствие посланного и возвращенного импульсов, что обеспечивает измерение расстояний с точностью порядка 0,6 м.

Если счетчик лазерной установки работает от генератора в 1 ГГц, то его разрешающая способность составляет 1 нсек (0,15 м).

При точном учете температуры и давления ошибки за влияние атмосферы можно свести до 0,2 м.

Таким образом, ошибка лазерного метода определения расстояний до ИСЗ оказывается порядка 0,7 м.

Полученные из лазерных наблюдений дальности приводятся к некоторым стандартным значениям температуры (T_0) и давления (p_0) атмосферы. Величина поправки определяется по формуле

$$\Delta r = \frac{a + b\Lambda\rho\Delta T^{-1} + cH}{\sin h + 10^{-3}\operatorname{ctg} h}, \qquad \text{(IV.52)}$$

где a, b, c — постоянные коэффициенты, T и p — температура и давление в момент наблюдений, h — высота ИСЗ над горизонтом, H — высота пункта над уровнем моря.

В измеренную дальность вводятся также поправки за аппаратурные задержки.

В случае необходимости результаты лазерных наблюдений так же, как и результаты любых других наблюдений, приводятся к центрам знаков.

Применение лазеров для освещения спутников с целью фотографирования позволило получить направления на них с ошибкой 1—2″, как при обычных фотографических наблюдениях.

Прогнозируется создание лазерных систем для измерения расстояний с точностью порядка 15 см.

§ 10. Обработка материалов регистрации времени

Большая скорость видимого перемещения большинства спутников предъявляет высокие требования к точности фиксирования моментов наблюдений. Для решения многих задач требуется с высокой точностью обеспечивать синхронность наблюдений.

При наблюдениях пассивных спутников, выполняя, как правило, квазисинхронные наблюдения (перекрывающиеся по времени), приводят их к единому моменту, называемому синхронным. Снимки пассивных ИСЗ содержат 10 и более точечных изображений спутника в перекрывающемся интервале времени. Для каждого положения спутника на снимке известен момент наблюдений T.

Эти моменты исправляют поправкой за спутниковую аберрацию, вычисляемой по формуле (III.89)

$$\Delta T = -\frac{r}{c}.$$

Такой подход освобождает от необходимости исправлять поправками за аберрацию координаты спутника на снимке.

Вычисление координат спутника на снимке для так называемого «синтетического» синхронного момента T_0 производится путем аппроксимации по способу наименьших квадратов полиномами третьей степени

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= a_0 + a_1T_0 + a_2T_0^2 + a_3T_0^3 \\ y_0 &= b_0 + b_1T_0 + b_2T_0^2 + b_3T_0^3 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(IV.53)}$$

В формуле (IV.53) a_i и $b_i (i=0, 1, 2, 3)$ — эмпирические коэффициенты, которые получаются по формулам аналогичного вида, если в них подставить измеренные на снимке координаты спутника x_i и y_i в моменты наблюдений T_i.

При наблюдениях активных спутников в качестве момента наблюдений принимается средний момент экспозиции звезд (камера неподвижна) или момент подачи спутником световой вспышки (камера отслеживает движение звезд).

В радиоэлектронных методах моментом наблюдений является время получения измеряемого параметра, например, при допплеровских наблюдениях с использованием интегральной системы — середина счетного интервала.

Сигналы точного времени сейчас передаются в системе так называемого всемирного координированного времени UTC. По существу это атомное время АТ-1, систематически корректируемое скачком так, чтобы уклонение UTC от всемирного времени UT-2 не превышало $0{,}7s$.

Для решения задач космической геодезии, как правило, требуется знать время UT-1, определяемое мгновенной частотой вращения Земли относительно ее средней оси. Соответствующие поправки для перехода от UTC к другим системам счета времени публикуются в бюллетенях «Эталонное время в средние моменты передачи радиосигналов», издаваемых ВНИИФТРИ.

Так же, как при астрономических определениях, при наблюдениях спутников в случае приема сигналов точного времени следует учитывать поправку за скорость распространения радиоволн

$$\Delta t_p \approx \frac{d}{v_p}, \qquad \text{(IV.54)}$$

где d — расстояние от радиостанции до пункта наблюдений,
v_p — скорость распространения радиоволн.

Если на борту спутника установлены высокостабильные часы, управляющие лампами-вспышками, и сигналы этих часов принимаются наземными пунктами (наземными службами времени) и сопоставляются с сигналами точного времени, то поправка за приведение показаний часов службы времени к системе *UT-1* будет равна [9]

$$\Delta T_{\text{Н}} = T + \tau + \Delta t_p + \Delta t_{\text{З}} - t_{\text{Н}}, \qquad \text{(IV.55)}$$

где T — средний момент передачи сигналов точного времени радиостанцией;

τ — поправка за приведение T к системе *UT-1*;

$\Delta t_{\text{З}}$ — задержки сигнала при прохождении через приемную аппаратуру наземной службы времени (в пункте наблюдений);

$t_{\text{Н}}$ — показания часов наземной службы времени.

Поправка к показаниям бортовых часов в момент вспышки равна [9]

$$\Delta T^*_{\text{Б}} = t^*_{\text{Н}} + \Delta t^*_{\text{Н}} + \Delta t^*_p + \Delta t_{\text{З}} - t^*_{\text{Б}}. \qquad \text{(IV.56)}$$

Время вспышки равно

$$T^* = t^*_{\text{Б}} + \Delta T^*_{\text{Б}}, \qquad \text{(IV.57)}$$

где $t^*_{\text{Б}}$ — показания бортовых часов спутника.

§ 11. Геодезические искусственные спутники Земли (ГИСЗ)

По своему целевому назначению ИСЗ можно подразделить на *исследовательские, метеорологические, навигационные, связные и геодезические.*

Для геодезических целей в принципе могут использоваться различные ИСЗ, относящиеся ко всем группам, однако наиболее ценные для геодезии и смежных с ней отраслей знаний данные могут быть получены в результате наблюдений специальных геодезических спутников.

Спутник может быть использован для целей геодезии, если он отвечает определенным требованиям. Такой спутник должен иметь:

1) форму, близкую к сферической;

2) поверхность, характеризующуюся большим коэффициентом отражения (для пассивных ИСЗ);

3) возможно большее отношение массы к площади поперечного сечения (в динамическом и орбитальном методах);

4) ограниченные определенными пределами параметры орбиты;

5) специальное бортовое оборудование (для активных ИСЗ).

Исключение составляют спутники-баллоны, для которых характерна малая величина отношения масса/поверхность и которые могут использоваться только при синхронных наблюдениях, когда не требуется знать точно геоцентрические координаты спутника.

Используемые для целей геодезии спутники должны иметь орбиты с эксцентриситетом 0,02—0,05 и во всяком случае, как правило, не более 0,1. Высота перигея орбиты должна заключаться между 1000—4000 км. Она не должна быть менее 500—800 км, так как в этом случае возникают существенные трудности при учете сопротивления атмосферы, кроме того, для обеспечения одной и той же территории при малой высоте спутника требуется большее число станций наблюдений. Наконец, чем меньше высота спутника, тем больше его видимая скорость, что осложняет производство наблюдений.

Недопустимо и значительное увеличение высоты перигея, так как в этом случае действие отдельных гармоник гравитационного поля Земли на движение ИСЗ начинает сглаживаться, таким образом, спутник становится мало пригодным для динамических исследований. Усиливается гравитационное действие на движение ИСЗ Луны и Солнца и осложняется учет этих влияний.

В зависимости от характера решаемых задач требования к ГИСЗ будут равными.

При решении геометрических задач для обеспечения большей территории целесообразно использовать спутники с большими наклонениями (60—80°) и высотами перигея порядка 3000—4000 км, что уменьшает возмущающее действие гравитационного поля Земли. При этом желательна практически круговая орбита.

Решение динамических задач требует использования ИСЗ с разными параметрами орбит и в первую очередь с разными высотами и наклонениями. Орбиты должны быть достаточно чувствительны к определяемым гравитационным параметрам и не чувствительны к влияниям, в том числе и гравитационным, которые трудно определить из наблюдений ИСЗ.

В орбитальном методе важно обеспечить минимальное влияние гравитационного поля Земли и атмосферы на орбиту, т. е. при использовании допплеровских и дальномерных измерений выгодны высокие спутники.

На борту геодезического спутника может находиться следующее оборудование:

1) импульсные источники света (оптические маяки или лампы-вспышки);

2) радиотехническое оборудование, необходимое для реализации допплеровских наблюдений;

3) радиотехническое оборудование, необходимое для измерения наклонных дальностей;

4) радиотехническое оборудование, необходимое для применения интерференционного метода;

5) уголковые отражатели (трипельпризмы), необходимые для использования лазеров;

6) радиовысотомер;

Таблица 3

Геодезические спутники и спутники другого целевого назначения, которые использовались для целей геодезии

№ пп	Дата запуска	Название ИСЗ	Высота перигея, км	Высота апогея, км	Наклонение, град	Период, мин.	Форма	Масса, кг	Диаметр/высота, см	Время активного существования	Время существования	Бортовая аппаратура (основная)
1	12.8.1960	Echo 1	1524	1684	47,2	118	Шар	76	3050	—	—	—
2	25.1.1964	Echo 2	1034	1299	81,5	109	»	256	4120	—	—	—
3	31.10.1962	ANNA 1B	1077	1184	50,1	108	Сфероид	161	91/122	—	3000 лет	Оптический маяк, допплеровский передатчик, аппаратура системы SECOR
4	10.10.1964	Explorer 22	881	1088	79,7	105	Правильная восьмигранная призма	53	46/30	24—36 месяцев	2000 лет	Допплеровский передатчик, лазерные отражатели
5	29.4.1965	Explorer 27	940	1318	41,0	108	То же	60	46/30	24—36 месяцев	3000 лет	Допплеровский передатчик, лазерные отражатели
6	6.11.1965	Explorer 29	1112	2277	59,4	120	»	175	122/81	—	50 000 лет	Оптический маяк, лазерные отражатели, аппаратура системы CRARR, допплеровский передатчик, аппаратура системы SECOR
7	24.6.1966	PAGEOS	4212 (2480)	4264 (5450)	87,0 (84,0)	181	Шар	110 (без контейнера 57)	3000	—	20 лет	—
8	11.11.1968	GEOS -B	1112	1482	105,7	112	Правильная восьмигранная призма	209	122/81	—	—	Оптический маяк, аппаратура системы SECOR, радарная система, допплеровский передатчик, лазерные отражатели, аппаратура системы CRARR

9	11.1.1964	SECOR 1	906	935	69,9	103	Параллелепипед	18	23×28××33	6—12 месяцев	1500 лет	Аппаратура системы SECOR
10	9.3.1965	SECOR 2	904	938	70,1	103	То же	18	23×28××33	6—12 месяцев	1500 лет	Аппаратура системы SECOR
11	11.8.1965	SECOR 5	1130	2423	69,0	122	Сфера	181,5	51	6—12 месяцев	10 000	Аппаратура системы SECOR
12	17.2.1966	Diapason	505	2740	34,1	119	Цилиндр	19,6	47/27	—	—	Допплеровский передатчик
13	8.2.1967	Diademe I	508	1340	40,1	104	»	22,7	50/20	—	—	Допплеровский передатчик, лазерные отражатели
14	18.2.1967	Diademe II	592	1886	39,4	110	»	22,7	50/20	—	—	Допплеровский передатчик, лазерные отражатели
15	12.2.1970	Peole	635	749	15,0	98	Восьмигранная призма	70	70/55	2—3 месяца	70 лет	Лазерные отражатели
16	94.1975	GEOS -C	838	845	115	102	—	340	125/120	—	12 месяцев	Та же, что на GEOS-B; кроме того, радиовысотомер, аппаратура для измерения расстояния и радиальной скорости между GEOS-C и ATS-F (технологический ИСЗ)

7) кварцевые или атомные часы;

8) специальная бортовая ЭЦВМ;

9) фотокамеры для съемки земной поверхности или поверхности планеты и для съемки звездного неба (при изучении геодезическими методами планет).

Данные о некоторых спутниках, использовавшихся для целей геодезии, приведены в табл. 3. Помимо специальных геодезических спутников в нее включены некоторые связные спутники («Эхо-1», «Эхо-2»), наблюдения которых использовались для решения геодезических задач.

§ 12. Расчет яркости ИСЗ

Для успешных наблюдений пассивных спутников необходимо уметь рассчитывать их яркость. Знать яркость спутника надо для суждения о требуемой мощности камеры и для выбора режима ее работы.

Яркость (величину) звезды вычисляют как функцию освещенности, обусловленной ее излучением,

$$m = -14{,}13^m - 2{,}50 \lg E. \qquad \text{(IV.58)}$$

Получаемое по формуле (IV.58) значение m относится к случаю, когда звезда находится в зените, а наблюдатель на уровне моря.

При зеркальном отражении спутник, имеющий форму шара, создает освещенность

$$E = \frac{1}{4} a \left(\frac{R_s}{r'}\right)^2 E_0, \qquad \text{(IV.59)}$$

где a — коэффициент отражения, R_s — радиус спутника, r' — расстояние до спутника, E_0 — освещенность, создаваемая Солнцем.

Переходя к яркости m, при $a=1$ получаем

$$m = -25{,}3^m - 5 \lg \frac{R_s}{r'}. \qquad \text{(IV.60)}$$

Формулы (IV.58) и (IV.60) не учитывают поглощения света атмосферой. Между тем по причине поглощения происходит ослабление освещенности в $\varkappa$ раз. Коэффициент $\varkappa$ равен

$$\varkappa = e^{-c \sec z}.$$

Каула показал [3], что для источника света вне атмосферы и наблюдателя на уровне моря

$$c = 0{,}0090\lambda^{-4} + 0{,}223,$$

где λ — длина световой волны.

Приведем без вывода еще одну формулу для расчета яркости спутника [3]:

$$m = m_{\odot} - 2{,}5\lg\frac{2}{3}a_0 - 5\lg\frac{R_s}{h} + 5\lg\sec z + \mu(\sec z - 1) -$$

$$- 2{,}5\lg\frac{\sin p + (\pi - p)\cos p}{\pi}, \qquad \text{(IV.61)}$$

где a_0 — коэффициент отражения при диффузном отражении, $h = r\cos z$, p — фазовый угол спутника (угол между векторами спутник — Солнце и спутник — пункт), z — зенитное расстояние ИСЗ, μ — характеризует поглощение света атмосферой в зените. Следует отметить, что зеркальное отражение у спутников, как правило, преобладает над диффузным.

Если камера отслеживает движение спутника или выполняются наблюдения активного спутника, то освещенность в фокальной плоскости камеры будет равна

$$E_k = k\left(\frac{D}{d}\right)^2 E, \qquad \text{(IV.62)}$$

где D — диаметр действующего отверстия объектива, d — диаметр кружка рассеивания (порядка 20—30 мкм), k — коэффициент проницаемости оптики, E — освещенность при визуальных наблюдениях.

Если отслеживание выполняется в течение $t_{\text{сек}}$, то практически количество световой энергии, достигшее фотопластинки (фотопленки), будет равно

$$\Phi = k\left(\frac{D}{d}\right)^2 E\cdot t. \qquad \text{(IV.63)}$$

Таким образом, эффективность следящей камеры зависит в первую очередь от D^2.

Если наблюдения выполняются неподвижной камерой, то эффективное время выдержки $t_{\text{эф}}$ можно представить формулой

$$t_{\text{эф}} = \frac{d}{F\omega}, \qquad \text{(IV.64)}$$

где F — фокусное расстояние камеры, ω — угловая скорость перемещения изображения спутника.

На основании формулы (IV.63), подставляя в нее $t_{\text{эф}}$, получим

$$\Phi = k\frac{D^2}{dF\omega}E, \qquad \text{(IV.65)}$$

откуда следует, что эффективность неподвижной камеры зависит не только от D^2, но и от фокусного расстояния камеры.

Освещенность от активных спутников может быть вычислена по формуле

$$E = \frac{I}{r^2} e^{-c \sec z}. \tag{IV.66}$$

Приведем также формулу, по которой может быть вычислена предельная звездная величина, доступная для наблюдений, в зависимости от действующего отверстия объектива камеры D и продолжительности экспозиции t:

$$m_L = -1 + 5 \lg D + 2{,}15 \lg t. \tag{IV.67}$$

Эта формула справедлива для пластинки (пленки) высокой (но не наивысшей) чувствительности.

Вообще говоря, предельная звездная величина зависит также от фокусного расстояния камеры. Причем с его увеличением увеличиваются перемещения изображения, обусловленные турбулентными явлениями в атмосфере. С учетом этого обстоятельства и влияния фона неба Уипплом рекомендует формулу

$$m_L = m_s + 5 \lg F_{[\text{см}]} - 2{,}5 \lg d_{[\text{см}]} - 20{,}8, \tag{IV.68}$$

где m_s — яркость ночного неба, выраженная в звездных величинах на 1 сек^2 ($m_s = 22^m$), d — диаметр изображения звезды (спутника) на фотоматериале. Значение d получают по формуле

$$d_{[\text{см}]} = 0{,}2 \cdot 10^{-3} + 1{,}23 \cdot 2\tau F \cdot 10^{-5} + \frac{F}{D} \cdot 10^{-4}, \tag{IV.69}$$

где $\tau = 1$—$2''$ — величина турбулентности.

Практика наблюдений спутников свидетельствует о том, что яркие ИСЗ в большинстве случаев надо фотографировать при высоте Солнца под горизонтом порядка 12°, а слабые — порядка 18°, что обеспечивает достаточный контраст спутник — фон. Очень яркие спутники («Эхо-1», «Эхо-2», PAGEOS) успешно наблюдались светосильной камерой при высоте Солнца под горизонтом 9—10°.

Упомянутые ограничения служат дополнительным свидетельством преимущества освещения спутника лазерным лучом, что позволяет наблюдать спутник ночью независимо от его освещения Солнцем. В перспективе возможны наблюдения в дневное время, что потребует выделения отраженного лазерного импульса с помощью фильтра.

Глава V

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

§ 1. Общие сведения

Методы наблюдений, рассмотренные в предыдущей главе, доставляют ту или иную информацию, которая в конечном счете служит для решения геодезических задач.

Геодезические задачи, которые решают с использованием наблюдений искусственных и естественных небесных объектов, подразделяют на *геометрические* и *динамические*. Геометрической задачей является построение пространственных геодезических сетей посредством синхронных или квазисинхронных наблюдений ИСЗ. В этом случае не требуется располагать точными значениями координат спутника, так как он используется как высокая подвижная визирная цель. Координаты достаточно знать весьма приближенно, чтобы обеспечить наблюдения в заданный момент времени на двух или большем количестве станций. Аналогичным образом могут наблюдаться специальные лампы-вспышки, установленные на стратостатах или самолетах, ракеты и другие подвижные визирные цели (ПВЦ).

В результате решения геометрических задач определяют взаимное положение пунктов в системе, задаваемой исходными пунктами, например в системе некоторого референц-эллипсоида.

Особой проблемой при этом является *масштабирование* космических геодезических построений, для которого необходимо располагать одной или несколькими базисными сторонами (пункт—пункт, пункт—спутник или спутник—спутник).

В динамических задачах космической геодезии непременным условием является знание с наивысшей возможной точностью координат спутника, что возможно при наличии детально разработанной теории его движения, достаточно точной модели гравитационного поля и надежных данных о параметрах атмосферы и их изменяемости. Только при выполнении указанных условий можно надежно учитывать разного рода возмущения, приводящие к эволюции орбиты.

В самой общей постановке динамический метод, как отмечалось выше, заключается в совместном определении по результатам наблюдений спутников координат пунктов (или поправок к их приближенным значениям), параметров, характеризующих гравитационное поле Земли, поправок к некоторым начальным значениям элементов орбиты, а также параметров, характеризующих атмосферу, и некоторых аппаратурных констант. В зависимости от конкретных условий возможны модификации этого метода, одной из них является так называемый орбитальный метод.

В любом случае значения координат пунктов, определенные в рамках динамического метода, получают в абсолютной системе координат, отнесенной к центру масс Земли. Особенностью является также и то, что при отсутствии линейных измерений масштабирование построений осуществляется с использованием гравитационного параметра $\mu = fM$, позволяющего переходить к большой полуоси орбиты спутника.

Подразделение задач космической геодезии на геометрические и динамические, как отмечалось выше, является в известной мере условным. Действительно, если теория движения спутника известна с достаточной степенью точности и если параметры гравитационного поля Земли не требуют уточнения, то к геометрическим задачам можно отнести определение размеров общего земного эллипсоида по наблюдениям ИСЗ, определение исходных геодезических дат, определение центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли и определение ориентации осей некоторой референцной геодезической системы относительно осей геоцентрической системы координат.

При рассмотрении в данной главе вопросов создания и уравнивания космических геодезических построений широко использовались результаты исследований, обобщенные в монографии [9].

§ 2. Синхронные и квазисинхронные наблюдения

Основное уравнение космической геодезии в векторной форме имеет вид

$$\bar{r}_S = \bar{r}'_{iS} + \overline{\Delta r} + ABC\bar{R}_i, \qquad (V.1)$$

где $\bar{r}_S$ — геоцентрический радиус-вектор ИСЗ, $\bar{r}'_{iS}$ — топоцентрический радиус-вектор, $\Delta\bar{r}$ — вектор, связывающий центр референц-эллипсоида с центром масс Земли, $\bar{R}_i$ — радиус-вектор пункта наблюдений в референцной системе, A, B и C — матрицы вращения, преобразующие (поворотом) референцную систему координат в геоцентрическую, причем

ω

$$A = \begin{vmatrix} \cos\psi_0 & \sin\psi_0 & 0 \\ -\sin\psi_0 & \cos\psi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta_0 & \sin\vartheta_0 \\ 0 & -\sin\vartheta_0 & \cos\vartheta_0 \end{vmatrix};$$

ε

$$C = \begin{vmatrix} \cos\gamma_0 & 0 & -\sin\gamma_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma_0 & 0 & \cos\gamma_0 \end{vmatrix},$$

ψ

где ψ_0, ϑ_0, γ_0 — эйлеровы углы.

В отличие от уравнения (1) в (V.1) оси геоцентрической и референцной систем координат непараллельны.

Используя уравнение (V.1) в качестве исходного, нетрудно перейти к уравнению, составляющему теоретическую основу задач космической геодезии об относительном положении, т. е. синхронных наблюдений.

Обратимся к рис. 44, на котором изображены синхронные наблюдения ИСЗ с двух станций. Для наблюдений с каждой станции можно записать уравнение (V.1). Далее, учитывая равенство в этих уравнениях $\bar{r}_S$ и $\Delta\bar{r}$, получаем

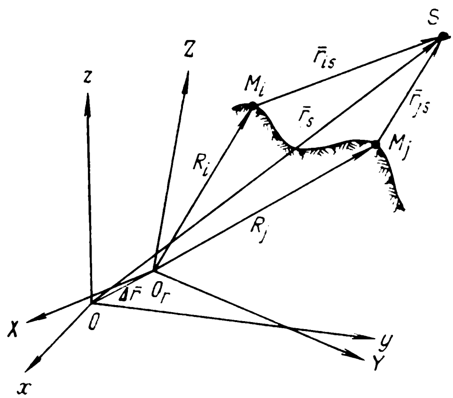

Рис. 44. Синхронные наблюдения ИСЗ с двух станций

$$\bar{r}'_{iS} - \bar{r}'_{jS} + ABC\,(\bar{R}_j - \bar{R}_i) = 0. \tag{V.2}$$

Если эйлеровы углы малы, т. е. оси геоцентрической и референцной систем практически параллельны, то приходим к уравнению

$$\bar{r}'_{iS} - \bar{r}'_{jS} + \bar{R}_j - \bar{R}_i = 0. \tag{V.3}$$

Из уравнений (V.2) и (V.3) следует, что при синхронных наблюдениях нет необходимости располагать точными значениями координат ИСЗ и точной теорией его движения.

Осуществление строгой синхронизации наблюдений пассивных спутников со станций, расстояния между которыми составляют иногда несколько тысяч километров, представляет сложную научно-техническую задачу. При этом ошибка времени при наблюдениях в $0{,}01^s$ при скорости движения спутника 8 км/сек приводит к ошибке в его положении, а следовательно, и в координатах пунктов, равной 80 м, что не может удовлетворить при решении геодезических задач.

Иначе обстоит дело при фотографических наблюдениях активных спутников, оснащенных специальными лампами-вспышками, которые включаются в строго определенный момент времени, задаваемый обычно бортовыми часами.

Практически в строгой синхронизации наблюдений пассивных спутников необходимости нет, достаточно проводить их в перекрывающиеся промежутки времени. Такие наблюдения называют квазисинхронными. При обработке этих наблюдений для вычисления координат фиктивной вспышки в синтетический синхронный момент T_0 применяют аппроксимацию с использованием полиномов третьей степени (см. гл. IV).

§ 3. Космические геодезические построения

В зависимости от состава измерений космические геодезические построения можно подразделить на *космическую триангуляцию, космическую трилатерацию (трисферация) и комбинированные построения.* Одним из частных случаев последних является пространственная геодезическая векторная сеть [53].

Основными элементами космических геодезических построений являются: вектор, соединяющий два пункта наблюдений, вектор, соединяющий пункт наблюдений и спутник, и плоскость синхронизации.

Направления хорд «пункт—пункт», характеризуются углами Φ и Λ. Угол Φ — наклон хорды к экватору, угол Λ образуется осью OX и проекцией хорды на плоскость экватора. Углы Φ и Λ принято называть *ориентирующими.*

Направление хорды может также характеризоваться направляющими косинусами орта «пункт—пункт».

$$\left.\begin{aligned} L_{1.2} &= \cos\Phi_{1.2}\cos\Lambda_{1.2} \\ M_{1.2} &= \cos\Phi_{1.2}\sin\Lambda_{1.2} \\ N_{1.2} &= \sin\Phi_{1.2} \end{aligned}\right\}. \qquad (V.4)$$

Аналогичным образом направление «пункт — спутник» задается полученными в результате измерений углами δ_{ik} и γ_{ik} ($\gamma_{ik}=\alpha_{ik}-S$) или направляющими косинусами соответствующего орта

$$\left.\begin{aligned} l_{ik} &= \cos\delta_{ik}\cos\gamma_{ik} \\ m_{ik} &= \cos\delta_{ik}\sin\gamma_{ik} \\ n_{ik} &= \sin\delta_{ik} \end{aligned}\right\}. \qquad (V.5)$$

Если в результате наблюдений получили направления на одно и то же положение спутника k с двух пунктов i_1 и i_2, то приходим к плоскости синхронизации, уравнение которой в координатной форме будет

$$A_k(X_2 - X_1) + B_k(Y_2 - Y_1) + C_k(Z_2 - Z_1) = 0, \qquad \text{(V.6)}$$

где коэффициенты A_k, B_k и C_k есть функции направляющих косинусов, вычисленных с использованием измеренных величин по формулам (V.5)

$$\left.\begin{aligned} A_k &= m_{i_1k} n_{i_2k} - n_{i_1k} m_{i_2k} \\ B_k &= n_{i_1k} l_{i_2k} - l_{i_1k} n_{i_2k} \\ C_k &= l_{i_1k} m_{i_2k} - m_{i_1k} l_{i_2k} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(V.7)}$$

Векторное уравнение плоскости синхронизации имеет вид

$$(\overline{R}_{i_1} - \overline{R}_{i_2})\bar{r}^o_{i_1k}\bar{r}^o_{i_2k} = 0, \qquad \text{(V.8)}$$

где $\overline{R}_{i_1}$ и $\overline{R}_{i_2}$ — радиусы-векторы пунктов, а $\bar{r}^o_{i_1k}$ и $\bar{r}^o_{i_2k}$ — орты направлений на спутник.

Если уравнение плоскости синхронизации (V.6) разделить на длину хорды $D_{i_1i_2}$, то оно примет вид

$$A_kL_{i_1i_2} + B_kM_{i_1i_2} + C_kN_{i_1i_2} = 0. \qquad \text{(V.9)}$$

Уравнение плоскости синхронизации может быть записано в сферических координатах. Действительно, плоскость синхронизации можно представить как плоскость, проведенную через три точки на сфере произвольного радиуса, получившиеся в результате пересечения ее поверхности с продолжениями векторов i_1i_2, i_1k и i_2k. Эти точки как принадлежащие одной плоскости лежат на дуге одного большого круга. В результате пересечения плоскости со сферой получаем так называемый круг одновременности [47]. Для получения уравнения плоскости синхронизации в сферических координатах надо преобразовать (V.9), учитывая, что

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{i_{1(2)}k} &= \operatorname{arctg}\left(\frac{m}{l}\right)_{i_{1(2)}k} \\ \delta_{i_{1(2)}k} &= \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)_{i_{1(2)}k} \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(V.10)}$$

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{i_1i_2} &= \operatorname{arctg}\left(\frac{M}{L}\right)_{i_1i_2} \\ \Phi_{i_1i_2} &= \operatorname{arctg}\left(\frac{N}{\sqrt{L^2+M^2}}\right)_{i_1i_2} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(V.11)}$$

В результате преобразований получим

$$\operatorname{tg}\delta_{i_1k}\sin(\Lambda_{i_1i_2} - \gamma_{i_2k}) + \operatorname{tg}\delta_{i_2k}\sin(\gamma_{i_1k} - \Lambda_{i_1i_2}) + $$
$$+ \operatorname{tg}\Phi_{i_1i_2}\sin(\gamma_{i_2k} - \gamma_{i_1k}) = 0. \qquad \text{(V.12)}$$

Поскольку при обработке наблюдений ИСЗ в целях создания космических геодезических построений в основном используются прямоугольные пространственные координаты, применение круга одновременности (V.12) ограничено. В основном применяют аналог круга одновременности — уравнение плоскости в прямоугольных пространственных координатах.

Если уравнение плоскости синхронизации (V.9) записать в виде детерминанта

$$\begin{vmatrix} l_{12} & m_{12} & n_{12} \\ l_{1k} & m_{1k} & n_{1k} \\ l_{2k} & m_{2k} & n_{2k} \end{vmatrix},$$

то уравнение круга одновременности есть результат сокращения этого детерминанта на постоянный множитель.

Перейдем к более подробному рассмотрению способов создания космических геодезических построений [9].

Космическая триангуляция

Идея такого построения принадлежит финскому геодезисту И. Вяйсяля (1946) [74]. Суть ее заключается в том, что при одновременных фотографических наблюдениях ИСЗ из разных пунктов земной поверхности по известным координатам некоторых из этих пунктов можно вычислить координаты ИСЗ и далее координаты определяемых пунктов.

Следует отметить, что координаты ИСЗ в этой задаче играют вспомогательную роль и, как будет показано ниже, могут непосредственно не вычисляться, если выполнить необходимые преобразования формул.

Возможны три вида элементарных фигур космической триангуляции, построенной по фотографическим наблюдениям ИСЗ: пространственные угловые засечки, угловые засечки хорд и пересечение плоскостей синхронизации. Эти фигуры отличаются разным количеством исходных и определяемых пунктов, с которых ведутся синхронные наблюдения. Этим элементарным фигурам соответствуют три метода создания космических геодезических построений: метод пространственных угловых засечек, метод хорд и метод плоскостей.

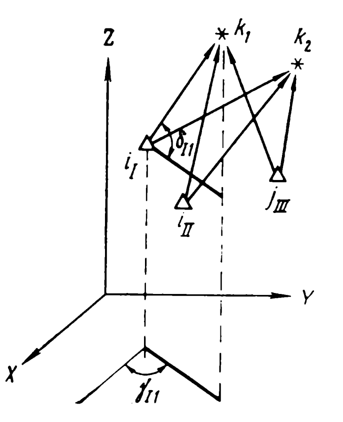

Рис. 45. Пространственно-угловая засечка

Пространственная угловая засечка. Для определения координат пункта спутник необходимо наблюдать синхронно с двух исходных и одного определяемого пункта. Необходимо наблюдать спутник в двух положениях или наблюдать два разных спутника (рис. 45).

В идеальном случае (при отсутствии ошибок наблюдений) согласно рис. 45 направления в точках k_1, k_2 и j будут пересекаться, что равносильно соблюдению условий компланарности

$$\left.\begin{aligned} (\bar{r}'_{I\cdot 1} \times \bar{r}'_{II\cdot 1})\,\bar{D}_{I\cdot II} = 0 \\ (\bar{r}'_{I\cdot 2} \times \bar{r}'_{II\cdot 2})\,\bar{D}_{I\cdot II} = 0 \\ (\bar{r}'_{III\cdot 1} \times \bar{r}'_{III\cdot 2})\,\bar{r}_{I\cdot 2} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (V.13)$$

Для приведенной на рис. 45 элементарной фигуры задача по определению координат пункта j может решаться в следующей последовательности (пункты i_I и i_{II} — исходные).

Для трех векторов $\bar{r}_{I\cdot 1}$; $\bar{r}_{II\cdot 1}$; $\bar{D}_{I\cdot II}$ имеет место соотношение

$$D_{I\cdot II} + \bar{r}'_{I\cdot 1} + \bar{r}'_{I\cdot II} = 0. \qquad (V.14)$$

Переходя к проекциям на координатные оси, получаем

$$\left.\begin{aligned} &(X_I - X_{II}) + r'_{I\cdot 1}\cos\gamma_{I\cdot 1}\cos\delta_{I\cdot 1} - r'_{II\cdot 1}\cos\gamma_{II\cdot 1}\cos\delta_{II\cdot 1} = 0 \\ &(Y_I - Y_{II}) + r'_{I\cdot 1}\sin\gamma_{I\cdot 1}\cos\delta_{I\cdot 1} - r'_{II\cdot 1}\sin\gamma_{II\cdot 1}\cos\delta_{II\cdot 1} = 0 \\ &(Z_I - Z_{II}) + r'_{I\cdot 1}\sin\delta_{I\cdot 1} - r'_{II\cdot 1}\sin\delta_{II\cdot 1} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (V.15)$$

Уравнения (V.15) позволяют не только вычислить неизвестные расстояния $r'_{I\cdot 1}$ и $r'_{II\cdot 1}$, но и произвести контроль вычислений.

Далее вычисляют координаты спутника в точке k_1 по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= X_I + r'_{I\cdot 1}\cos\gamma_{I\cdot 1}\cos\delta_{I\cdot 1} = X_{II} + r'_{II\cdot 1}\cos\gamma_{II\cdot 1}\cos\delta_{II\cdot 1} \\ y_1 &= Y_I + r'_{I\cdot 1}\sin\gamma_{I\cdot 1}\cos\delta_{I\cdot 1} = Y_{II} + r'_{II\cdot 1}\sin\gamma_{II\cdot 1}\cos\delta_{II\cdot 1} \\ z_1 &= Z_I + r'_{I\cdot 1}\sin\delta_{I\cdot 1} = Z_{II} + r'_{II\cdot 1}\sin\delta_{II\cdot 1} \end{aligned}\right\}. \qquad (V.16)$$

Аналогично можно вычислить координаты спутника в положении k_2, а затем, используя вычисленные координаты k_1 и k_2 получают координаты пункта наблюдений j.

В некоторых случаях не вычисляют по (V.15) неизвестные значения $r'_{I\cdot 1}$ и $r'_{II\cdot 1}$, а преобразуют уравнения (V.16) таким образом, чтобы получить формулы для вычисления координат спутника

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{Y_{II} - Y_I + X_I \operatorname{tg}\gamma_{I.1} - X_{II} \operatorname{tg}\gamma_{II.1}}{\operatorname{tg}\gamma_{I.1} - \operatorname{tg}\gamma_{II.1}} \\
y_1 &= \frac{X_{II} - X_I + Y_I \operatorname{ctg}\gamma_{I.1} - Y_{II} \operatorname{ctg}\gamma_{II.1}}{\operatorname{ctg}\gamma_{I.1} - \operatorname{ctg}\gamma_{II.1}} \\
z_1 &= Z_1 + \Delta x_{I.1} \sec\gamma_{I.1} \operatorname{tg}\delta_{I.1} = Z_I + \Delta y_{I.1} \operatorname{cosec}\gamma_{I.1} \operatorname{tg}\delta_{I.1}
\end{aligned}\right\} \quad (V.17)$$

и контрольные формулы

$$z_1 = Z_{I.1} + \Delta x_{1.II} \sec\gamma_{II.1} \operatorname{tg}\delta_{II.1} = Z_{II} + \Delta y_{1.II} \operatorname{cosec}\gamma_{II.1} \operatorname{tg}\delta_{II.1}. \quad (V.18)$$

Также поступают при вычислении координат спутника в положении k_2.

Необходимым условием реализации рассмотренного построения является фиксирование моментов каждого наблюдения спутника.

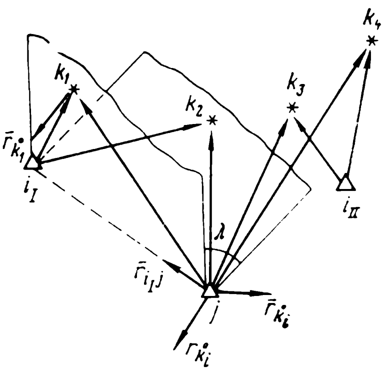

Рис. 46. Метод хорд

Основная трудность практического осуществления данного построения состоит в обеспечении одновременной видимости спутника с трех станций, удаленных на значительные расстояния.

Более гибким в этом отношении является метод хорд.

Угловая засечка хорд требует наблюдения двух положений спутника одновременно с определяемого и одного из исходных пунктов (рис. 46).

Нормируем коэффициенты A_k, B_k и C_k (V.7) с помощью синуса угла β_k (угол засечки направлений на спутник). Направляющие косинусы орта $\bar{r}^0_k$, перпендикулярного к плоскости синхронизации, будут равны

$$\left.\begin{aligned}
l_k &= \frac{A_k}{\sin\beta_k} \\
m_k &= \frac{B_k}{\sin\beta_k} \\
n_k &= \frac{C_k}{\sin\beta_k}
\end{aligned}\right\}. \quad (V.19)$$

Как следует из рис. 46, при наблюдении спутника в положениях k_1 и k_2 получаем две плоскости синхронизации. Перпендикулярные к этим плоскостям векторы $\bar{r}^o_{k_1}$ и $\bar{r}^o_{k_2}$ реализуют плоскость, нормаль к которой параллельна хорде, соединяющей пункты наблюдений (i_{I} и j). Следовательно, вектор, характеризующий направление хорды, есть векторное произведение

$$\bar{r}_{i_{\text{I}}j} = [\bar{r}^o_{k_1} \times \bar{r}^o_{k_2}]. \tag{V.20}$$

Если обозначить угол между плоскостями синхронизации через λ, то с учетом (V.20) направляющие косинусы хорды, соединяющей пункты наблюдений, будут

$$\left.\begin{aligned} L_{i_{\text{I}}j} &= \frac{1}{\sin\lambda \sin\beta_1 \sin\beta_2}(B_1C_2 - C_1B_2) \\ M_{i_{\text{I}}j} &= \frac{1}{\sin\lambda \sin\beta_1 \sin\beta_2}(C_1A_2 - C_2A_1) \\ N_{i_{\text{I}}j} &= \frac{1}{\sin\lambda \sin\beta_1 \sin\beta_2}(A_1B_2 - A_2B_1) \end{aligned}\right\}. \tag{V.21}$$

Эти величины являются искомыми в методе хорд.

Если наблюдения выполнялись с пунктов i_{I}, i_{II} и j, то можем записать уравнения плоскостей синхронизации

$$\left.\begin{aligned} A_1L_{i_{\text{I}}j} + B_1M_{i_{\text{I}}j} + C_1N_{i_{\text{I}}j} &= 0 \\ A_2L_{i_{\text{II}}j} + B_2M_{i_{\text{II}}j} + C_2N_{i_{\text{II}}j} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{V.22}$$

Если одно из неизвестных, например $N \neq 0$, то вместо (V.22) можно записать

$$\left.\begin{aligned} A_1\left(\frac{L}{N}\right)_{i_{\text{I}}j} + B_1\left(\frac{M}{N}\right)_{i_{\text{I}}j} + C_1 &= 0 \\ A_2\left(\frac{L}{N}\right)_{i_{\text{II}}j} + B_2\left(\frac{M}{N}\right)_{i_{\text{II}}j} + C_2 &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{V.23}$$

Основываясь на соотношениях (V.4), после отыскания неизвестных $\frac{L}{N}$ и $\frac{M}{N}$ вычислим ориентирующие углы

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{i_{\text{I}}j} &= \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{M}{N}\right)_{i_{\text{I}}j} : \left(\frac{L}{N}\right)_{i_{\text{I}}j}\right] \\ \Phi_{i_{\text{I}}j} &= \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{L}{N}\right)^2_{i_{\text{I}}j} + \left(\frac{M}{N}\right)^2_{i_{\text{I}}j}\right] \end{aligned}\right\}. \tag{V.24}$$

По аналогичным формулам находят $\Lambda_{i_{\text{II}}j}$ и $\Phi_{i_{\text{II}}j}$, после чего не составляет труда по формулам вида (V.15)—(V.17) найти координаты пункта j.

Пересечение плоскостей синхронизации как метод создания космических геодезических построений применяется в случае, когда каждое положение спутника наблюдается синхронно лишь с двух пунктов, один из которых является исходным, а другой — определяемым (рис. 47).

Для рассматриваемого случая уравнения трех плоскостей синхронизации будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} A_1X_j + B_1Y_j + C_1Z_j + W_1 = 0 \\ A_2X_j + B_2Y_j + C_2Z_j + W_2 = 0 \\ A_3X_j + B_3Y_j + C_3Z_j + W_3 = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (V.25)$$

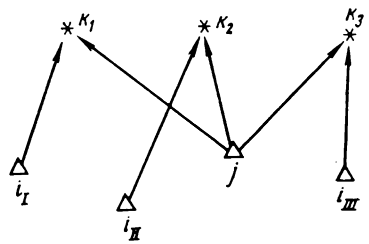

Рис. 47. Пересечение плоскостей синхронизации

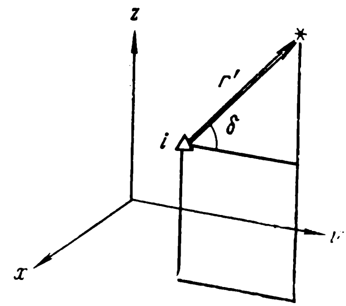

Рис. 48. Линейно-угловая пространственная засечка

где свободные члены есть

$$W_n = -A_nX_i - B_nY_i - C_nZ_i,$$

причем

$$\begin{aligned} & n = 1,\ 2,\ 3 \\ & i = \text{II, III} \quad \text{при} \quad n = 1 \\ & i = \text{III, I} \quad \text{»} \quad n = 2 \\ & i = \text{I, II} \quad \text{»} \quad n = 3. \end{aligned}$$

В уравнениях (V.25) три неизвестных — координаты пункта j.

На практике во многих случаях элементарные фигуры космических геодезических построений образуются сочетанием фотографических и радиотехнических наблюдений. В последнем случае в качестве измеренных величин получают расстояния и разности расстояний (или радиальные скорости).

Далее рассмотрим некоторые элементарные фигуры, образованные комбинированными наблюдениями и позволяющие определить положения ИСЗ или пункта.

Линейно-угловые пространственные засечки. Пусть на пункте i из фотографических наблюдений определены δ_{ik} и γ_{ik} и с помощью лазера измерено на расстояние r'_{ik} (рис. 48).

Тогда координаты ИСЗ равны

$$\left.\begin{aligned} x_k &= X_i + r'_{ik}\cos\delta_{ik}\cos\gamma_{ik} \\ y_k &= Y_i + r'_{ik}\cos\delta_{ik}\sin\gamma_{ik} \\ z_k &= Z_i + r'_{ik}\sin\delta_{ik} \end{aligned}\right\}. \qquad (V.26)$$

Аналогично вычисляются координаты пункта, если известно положение ИСЗ.

Возможен случай, когда с одного пункта до спутника измеряется расстояние, а с другого производят его фотографирование (рис. 49). Координаты пунктов известны. Тогда задача решается по формулам

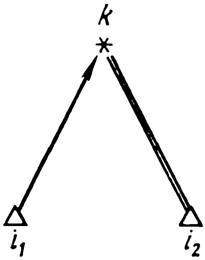

Рис. 49. Определение положения ИСЗ путем фотографирования его с одного пункта и измерения дальности с другого

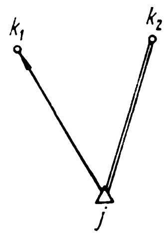

Рис. 50. К определению положения пункта наблюдений

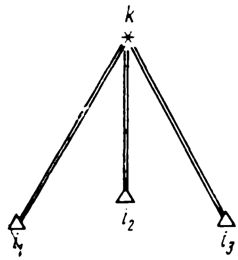

Рис. 51. Пространственная линейная засечка

$$\left.\begin{aligned} x_k - X_{i_1} + r'_{i_1k}\, l_{i_1k} &= 0 \\ y_k - Y_{i_1} + r'_{i_1k} m_{i_1k} &= 0 \\ z_k - Z_{i_1} + r'_{i_1k} n_{i_1k} &= 0 \\ (x_k - X_{i_2})^2 + (y_k - Y_{i_2})^2 + (z_k - Z_{i_2})^2 &= r'^2_{i_2k} \end{aligned}\right\}. \qquad (V.27)$$

При известных положениях ИСЗ аналогичным образом определяют положение пункта (рис. 50).

Если до спутника измеряют только расстояния, то имеем дело с **пространственной линейной засечкой** (рис. 51).

Положение ИСЗ (x_k, y_k, z_k) в этом случае определяется с помощью следующих формул:

$$\left.\begin{aligned} (x_k - X_{i_1})^2 + (y_k - Y_{i_1})^2 + (z_k - Z_{i_1})^2 &= r'^2_{i_1k} \\ (x_k - X_{i_2})^2 + (y_k - Y_{i_2})^2 + (z_k - Z_{i_2})^2 &= r'^2_{i_2k} \\ (x_k - X_{i_3})^2 + (y_k - Y_{i_3})^2 + (z_k - Z_{i_3})^2 &= r'^2_{i_3k} \end{aligned}\right\}. \qquad (V.28)$$

§ 4. Виды условий, возникающих в космических геодезических построениях

В космических геодезических построениях, так же как в традиционных геодезических сетях, возникают полюсные, базисные и координатные условия. Исключение составляют угловые условия (условия сумм, азимутов), так как направления при фотографических наблюдениях получаются независимо в результате привязки изображений спутника к опорным звездам.

Кроме того, в космических геодезических построениях возникают специфические условия: компланарности трех векторов, пучка плоскостей и связки плоскостей.

Условие компланарности трех векторов заключается в том, что, строго говоря, при синхронных наблюдениях спутника с двух пунктов векторы пункт — спутник и пункт — пункт должны лежать в одной плоскости. В векторной форме это означает, что

$$\bar{r}'_{1\cdot k}\bar{r}'_{2\cdot k}\bar{D}_{1\cdot 2} = 0. \qquad (V.29)$$

Соответственно в координатной форме имеем

$$\begin{vmatrix} l_{1\cdot 2} & m_{1\cdot 2} & n_{1\cdot 2} \\ l_{1\cdot 3} & m_{1\cdot 3} & n_{1\cdot 3} \\ l_{2\cdot 3} & m_{2\cdot 3} & n_{2\cdot 3} \end{vmatrix} = 0. \qquad (V.30)$$

Условие пучка плоскостей требует, чтобы все плоскости синхронизации, образовавшиеся в результате наблюдений спутников с двух пунктов, пересекались по одной линии (хорде), соединяющей эти пункты. Условие возникает, если число этих плоскостей более двух.

В векторной форме это условие записывается в виде

$$\bar{\Pi}_1\,\bar{\Pi}_2\,\bar{\Pi}_3 = 0, \qquad (V.31)$$

где $\bar{\Pi}_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ — векторы, перпендикулярные к плоскостям синхронизации. В координатной форме

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (V.32)$$

Условие связки плоскостей в координатной форме будет

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (V.33)$$

Это означает, что плоскости синхронизации, содержащие какой-либо пункт наблюдений, должны пересекаться в одной точке (в этом пункте). Условие возникает, если число таких плоскостей больше трех.

Что касается базисного, полюсного и координатных условий, то они аналогичны соответствующим условиям, возникающим в обычных геодезических построениях.

Условия, возникающие в космических геодезических построениях, в большинстве случаев обладают свойством эквивалентности. Наиболее универсальным является условие связки плоскостей. После его удовлетворения в космических геодезических построениях автоматически удовлетворяются координатные и полюсные условия.

При использовании условия связки плоскостей и пучка плоскостей имеем дело с некоторым количеством плоскостей синхронизации. Из-за громоздкого и нестандартного вида уравнений плоскостей синхронизации координаты определяемых пунктов, находящихся в соответствующих плоскостях, вводят в качестве дополнительных неизвестных. Такой прием не приемлем при выполнении априорной оценки точности.

§ 5. Понятие об уравнивании и оценке точности космических геодезических построений

Для уравнивания космических геодезических построений применяются параметрический способ и способ условий с дополнительными неизвестными [9]. Применение способа условий в «чистом» виде связано с большими трудностями, и он практически не используется.

Получение уравнений поправок в параметрическом способе уравнивания базируется на использовании в качестве исходных уравнений (IV.19), (IV.20), (IV.36) и (IV.50), выражающих функциональную зависимость между измеренными и неизвестными величинами в космических геодезических построениях. Получению уравнений поправок на основе зависимостей (IV.19), (IV.20), (IV.36), (IV.50) предшествует их линеаризация.

После линеаризации уравнения (IV.19), учитывая, что $\gamma = \alpha - S$, имеем

$$\gamma'_{ik} + v_\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_k - Y_i}{x_k - X_i}\right)_0 + \frac{\partial\gamma}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial\gamma}{\partial y_k}dy_k + \frac{\partial\gamma}{\partial X_i}dX_i + \frac{\partial\gamma}{\partial Y_i}dY_i. \quad \text{(V.34)}$$

Обозначим

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y_k - Y_i}{x_k - X_i}\right)_0 - \gamma'_{ik} = W\gamma_{ik}. \quad \text{(V.35)}$$

Первый член в этой формуле получается с использованием предварительных координат пункта и спутника, второй член — есть измеренная величина. При вычислении частных производных, входящих в уравнение (V.34) в качестве коэффициентов при неизвестных, также используются предварительные координаты пункта и спутника и результаты измерений.

Структура исходного уравнения (IV.19) такова, что коэффициенты при dx_k и dX_i, равным образом, как и коэффициенты при dy_k и dY_i, будут различаться только знаком. Например,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\gamma}{\partial x_k} &= \frac{\sin\gamma'}{r_0'\cos\delta'} \\ \frac{\partial\gamma}{\partial X_i} &= -\frac{\sin\gamma'}{r_0'\cos\delta'} \end{aligned}\right\}, \qquad (V.36)$$

где

$$r_0'\cos\delta' = (S_{ik})_0 = \sqrt{(x_k - X_i)_0^2 + (y_k - Y_i)_0^2}\ . \qquad (V.37)$$

Учитывая это, введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\gamma}{\partial x_k} &= -a \\ \frac{\partial\gamma}{\partial X_i} &= a \\ \frac{\partial\gamma}{\partial y_k} &= -b \\ \frac{\partial\gamma}{\partial Y_i} &= b \end{aligned}\right\}. \qquad (V.38)$$

Принимая во внимание (V.34)—(V.38), получаем уравнение поправок для γ

$$adx_k + bdy_k - adX_k - bdY_k + W_{\gamma_{ik}} = v_{\gamma_{ik}}, \qquad (V.39)$$

$$(\text{вес } p_{\gamma_{ik}}).$$

Действуя аналогичным образом, из (IV.20) для измеренного угла δ получим сначала

$$\delta_{ik}' + v_\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{z_k - Z_i}{\sqrt{(x_k - X_i)^2 + (y_k - Y_i)^2}}\right) + \frac{\partial\delta}{\partial x_k}dx_k +$$

$$+ \frac{\partial\delta}{\partial y_k}dy_k + \frac{\partial\delta}{\partial z_k}dz_k + \frac{\partial\delta}{\partial X_i}dX_i + \frac{\partial\delta}{\partial Y_i}dY_i + \frac{\partial\delta}{\partial Z_i}dZ_i. \qquad (V.40)$$

Далее, вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\delta}{\partial x_k} &= c, & \frac{\partial\delta}{\partial X_i} &= -c\\ \frac{\partial\delta}{\partial y_k} &= e, & \frac{\partial\delta}{\partial Y_i} &= -e\\ \frac{\partial\delta}{\partial z_k} &= f, & \frac{\partial\delta}{\partial Z_i} &= -f\end{aligned}\right\}, \tag{V.41}$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{z_k - Z_i}{\sqrt{(x_k - X_i)^2 + (y_k - Y_i)^2}}\right)_0 - \delta' = W_{\delta_{ik}}, \tag{V.42}$$

получим уравнение поправок

$$c dx_k + e dy_k + f dz_k - c dX_i - e dY_i - f dZ_i + W_{\delta_{ik}} = v_{\delta_{ik}} \quad (\text{вес } p_{\delta_{ik}}). \tag{V.43}$$

Коэффициенты при неизвестных dx_k и dX_i; dy_k и dY_i и т. д. равны по величине и противоположны по знаку.

Несложные преобразования с использованием соотношений

$$\left.\begin{aligned} l &= \cos\delta\cos\gamma\\ m &= \cos\delta\sin\gamma\\ n &= \sin\delta\end{aligned}\right\}$$

позволяют перейти от (V.39), (V.43) к уравнениям поправок, в которых коэффициенты при неизвестных есть функции направляющих косинусов l, m, n.

Для установления соотношения весов p_δ и p_γ следует учесть, что $m_\delta = m_\gamma \cos\delta$, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} p_\delta &= \frac{C}{m_\delta^2}\\ p_\gamma &= \frac{C}{m_\delta^2 \sec^2\delta}\end{aligned}\right\}. \tag{V.44}$$

Если известны ошибки фиксирования моментов наблюдений (m_S), то вместо (V.44) надо пользоваться формулами

$$\left.\begin{aligned} p_\delta &= \frac{C}{m_\delta^2 + V_\delta^2 m_S^2}\\ p_\gamma &= \frac{C}{m_\delta^2 \sec_\delta^2 + \left(1 + V_\alpha^2\right) m_S^2}\end{aligned}\right\}, \tag{V.45}$$

где V_α и V_δ — составляющие топоцентрической скорости спутника по соответствующим координатам.

Уравнение поправок в случае измерения дальностей получается на основе формулы (IV.50) после ее линеаризации и имеет вид

$$\frac{\partial r'}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial r'}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial r'}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial r'}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial r'}{\partial Y_i} dY_i +$$

$$+ \frac{\partial r'}{\partial Z_i} dZ_i + \sqrt{(x_k - X_i)_0^2 + (y_k - Y_i)_0^2 + (z_k - Z_i)_0^2} - r'_{ik} = v_{r_{ik}}. \tag{V.46}$$

Найдем коэффициенты при неизвестных и обозначим их

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial r'}{\partial x_k} &= \frac{x_k - X_i}{r'_{ik}} = l'_{ik}\\
\frac{\partial r'}{\partial y_k} &= \frac{y_k - Y_i}{r'_{ik}} = m'_{ik}\\
\frac{\partial r'}{\partial z_k} &= \frac{z_k - Z_i}{r'_{ik}} = n'_{ik}\\
\frac{\partial r'}{\partial X_i} &= -\frac{x_k - X_i}{r'_{ik}} = -l'_{ik}\\
\frac{\partial r'}{\partial Y_i} &= -\frac{y_k - Y_i}{r'_{ik}} = -m'_{ik}\\
\frac{\partial r'}{\partial Z_i} &= -\frac{z_k - Z_i}{r'_{ik}} = -n'_{ik}
\end{aligned}\right\}. \tag{V.47}$$

Обозначим

$$\sqrt{(x_k - X_i)_0^2 + (y_k - Y_i)_0^2 + (z_k - Z_i)_0^2} - r'_{ik} = W_{r_{ik}} \tag{V.48}$$

и с учетом (V.47) получим уравнение поправок

$$\begin{gathered} l'_{ik} dx_k + m'_{ik} dy_k + n'_{ik} dz_k - l'_{ik} dX_i - \\ - m'_{ik} dY_i - n'_{ik} dZ_i + W_{r_{ik}} = v_{r_{ik}} \end{gathered} \tag{V.49}$$

$$\left(\text{вес } p_r = \frac{Cr'^2}{m_r^2}\right).$$

Если измеряется разность расстояний Δr от пункта i до положений спутника k_1 и k_2, то исходя из (IV. 39)

$$\frac{\partial \Delta r}{\partial x_{k_1}} dx_{k_1} + \frac{\partial \Delta r}{\partial y_{k_1}} dy_{k_1} + \frac{\partial \Delta r}{\partial z_{k_1}} dz_{k_1} + \frac{\partial \Delta r}{\partial x_{k_2}} dx_{k_2} +$$

$$+ \frac{\partial \Delta r}{\partial y_{k_2}} dy_{k_2} + \frac{\partial \Delta r}{\partial z_{k_2}} dz_{k_2} + \frac{\partial \Delta r}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial \Delta r}{\partial Y_i} dY_i +$$

$$+ \frac{\partial \Delta r}{\partial Z_i} dZ_i + W_{\Delta r} = v_{\Delta r}, \tag{V.50}$$

где

$$W_{\Delta r}=\sqrt{(x_{k_1}-X_i)_0^2+(y_{k_1}-Y_i)_0^2+(z_{k_1}-Z_i)_0^2}-$$
$$-\sqrt{(x_{k_2}-X_i)_0^2+(y_{k_2}-Y_i)_0^2+(z_{k_2}-Z_i)_0^2}-\Delta r'. \qquad (V.51)$$

После вычисления частных производных и введения соответствующих обозначений приходим к следующей форме уравнения поправок:

$$l_{ik_1}dx_{k_1}+m_{ik_1}dy_{k_1}+n_{ik_1}dz_{k_1}-l_{ik_2}dx_{k_2}-m_{ik_2}dy_{k_2}-n_{ik_2}dz_{k_2}-$$
$$-gdX_i-hdY_i-qdZ_i+W_{\Delta r}=v_{\Delta r} \quad (\text{вес } p_{\Delta r}). \qquad (V.52)$$

При параметрическом способе уравнивания спутниковых построений, полученных из фотографических наблюдений, в уравнения поправок в качестве дополнительных неизвестных могут быть введены систематические ошибки регистрации времени на пунктах наблюдений. Обозначив такую ошибку для пункта наблюдений i через $(\Delta t)_i$, уравнения поправок (V.39) и (V.43) можем переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} adx_k+bdy_k-adX_i-bdY_i+V_\alpha(\Delta t)_i+W_{\gamma_{ik}}&=v_{\gamma_{ik}} \\ cdx_k+edy_k+fdz_k-cdX_i-edY_i-fdZ_i+V_\delta(\Delta t)_i+W_{\delta_{ik}}&=v_{\delta_{ik}}. \end{aligned}\right\}. \qquad (V.53)$$

Аналогичным образом в качестве дополнительных неизвестных могут быть введены в уравнения поправок систематические ошибки $\sigma(r)_i$ или $\sigma(\Delta r)_i$.

При параметрическом способе уравнивания количество уравнений поправок вида (V.39), (V.43), (V.49) и (V.52) равно числу измерений. От уравнений поправок переходят к системе нормальных уравнений. Ее порядок равен $3(k+j)$, где k — число наблюдавшихся положений ИСЗ, j — число определяемых пунктов наблюдений, обычно $k\gg j$.

Как правило, положения спутника не связаны между собой, а связаны лишь с наземными пунктами. Это приводит к системе, которая распадается на группы частично независимых уравнений. Решать такую систему целесообразно по способу Пранис-Праневича. Решение выполняется под условием $\Sigma pv^2=\min$.

В практике возможен еще один случай космических геодезических построений, когда для уравнивания применяется параметрический способ. Предположим, что синхронные (квазисинхронные) наблюдения каждого положения спутника выполнялись только с двух пунктов. В этом случае каждая плоскость синхронизации будет независимой. Условное уравнение каждой такой плоскости будет

$$\Pi=A_k(X_i-X_j)+B_k(Y_i-Y_j)+C_k(Z_i-Z_j)=0. \qquad (V.54)$$

После линеаризации этого уравнения получим

$$A_k\Delta X_{ij} + B_k\Delta Y_{ij} + C_k\Delta Z_{ij} + W_k =$$
$$= -\left(\nu_1 v_{\gamma_{ik}} + \nu_2 v_{\delta_{ik}} + \nu_3 v_{\gamma_{jk}} + \nu_4 v_{\delta_{jk}}\right), \qquad (V.55)$$

причем

$$A_k = \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta X_{ij}}; \qquad B_k = \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta Y_{ij}}; \qquad C_k = \frac{\partial \Pi}{\partial \Delta Z_{ij}};$$

$$\Delta X_{ij} = (X_i - X_j); \quad \Delta Y_{ij} = (Y_i - Y_j); \quad \Delta Z_{ij} = Z_i - Z_j;$$

$$\nu_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{ik}}; \quad \nu_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_{ik}}; \quad \nu_3 = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{ik}}; \quad \nu_4 = \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_{ik}};$$

$$W_k = A_k'\Delta X^\circ + B_k'\Delta Y^\circ + C_k'\Delta Z^\circ.$$

Для использования параметрического способа уравнивания уравнение (V.54) представляют в следующей форме:

$$-A_k dX_i - B_k dY_i - C_k dZ_i + A_k dX_j + B_k dY_j + C_k dZ_j + W_k = \zeta_k, \qquad (V.56)$$

где

$$\zeta_k = -\left(\nu_1 v_{\gamma_{ik}} + \nu_2 v_{\delta_{ik}} + \nu_3 v_{\gamma_{jk}} + \nu_4 v_{\delta_{jk}}\right).$$

Таким образом, согласно структуре уравнения (V.56) «измеренным» элементом в нем является плоскость синхронизации. Определяя поправку ζ_k, определяем ошибку положения этой плоскости.

В качестве дополнительных неизвестных в уравнение (V.56) могут быть введены систематические ошибки регистрации времени на пунктах i и j.

$$-A_k dX_i - B_k dY_i - C_k dZ_i + A_k dX_j + B_k dY_j + C_k dZ_j +$$
$$+ \left(\nu_1 V_{\alpha_i} + \nu_2 V_{\delta_i}\right)(\Delta t)_i + \left(\nu_3 V_{\alpha_j} + \nu_4 V_{\delta_j}\right)(\Delta t)_j + W_k = \zeta_k, \qquad (V.57)$$

$$\left(\text{вес } p_k = \frac{1}{\dfrac{\nu_1^2}{p_{\gamma_{ik}}} + \dfrac{\nu_2^2}{p_{\delta_{ik}}} + \dfrac{\nu_3^2}{p_{\gamma_{jk}}} + \dfrac{\nu_4^2}{p_{\delta_{jk}}}}\right).$$

При отсутствии дополнительных неизвестных порядок системы нормальных уравнений будет равен $3j$, где j — число определяемых пунктов.

На практике уравнения поправок вида (V.57) часто сочетаются с уравнениями поправок (V.39), (V.43), (V.49) и (V.52), что зависит от состава и количества измерений на пунктах.

Как уже отмечалось, уравнивание космических геодезических построений по способу условий производится с введением дополнительных неизвестных. В качестве таких неизвестных вводятся координаты (поправки к координатам) определяемых пунктов. Для подсчета количества нормальных уравнений в этом случае применяется формула $N=r+3j$, где r — число независимых условий, а j — число определяемых пунктов.

Преимущественно используются три вида условных уравнений: условие плоскости, базисное условие в случае измерения расстояний и подобное условие при измерении разности расстояний.

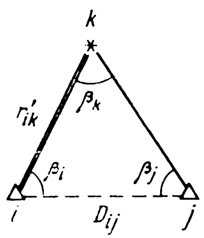

Рис. 52. К выводу базисного условия

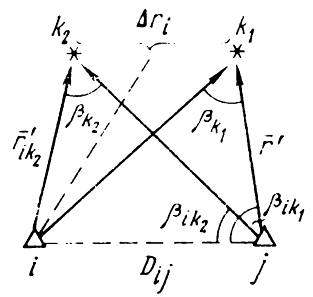

Рис. 53. К выводу базисного условия для измеренной разности расстояний

Условное уравнение плоскости (с дополнительными неизвестными) приводилось выше (V.57).

Базисное условное уравнение для измеренного до ИСЗ расстояния получается с использованием рис. 52. Из треугольника ikj при этом получаем

$$\Pi = \frac{r'_{ik}\sin\beta_k}{D_{ij}\sin\beta_j} - 1 = 0. \qquad (V.58)$$

После линеаризации базисного условного уравнения имеем

$$\nu_1 v_{\gamma_{ik}} + \nu_2 v_{\delta_{ik}} + \nu_3 v_{\gamma_{jk}} + \nu_4 v_{\delta_{jk}} + \nu_5 v_{r_{ik}} + a(dX_j - dX_i) + b(dY_j - dY_i) + c(dZ_j - dZ_i) + W_k = 0. \qquad (V.59)$$

Если имеем космическое геодезическое построение, изображенное на рис. 53, то возникает базисное условие для измеренной разности расстояний (Δr_i)

$$\Pi = \Delta r_i + D\Delta X_{ij} + E\Delta Z_{ij}. \qquad (V.60)$$

Условное уравнение при этом будет

$$\nu_1 v_{\gamma_{ik_1}} + \nu_2 v_{\delta_{ik_1}} + \nu_3 v_{\gamma_{jk_1}} + \nu_4 v_{\delta_{jk_1}} + \nu_5 v_{\gamma_{ik_2}} + \nu_6 v_{\delta_{ik_2}} + \nu_7 v_{\gamma_{jk_2}} + \nu_8 v_{\delta_{jk_2}} + \nu_9 v_{\Delta r_i} + a(\Delta X_j - \Delta X_i) + b(\Delta Z_j - \Delta Z_i) + W_k = 0. \quad (V.61)$$

Как следует из структуры приведенного уравнения, оно является сочетанием условных уравнений плоскостей синхронизации и условного уравнения разностей расстояний. Количество уравнений плоскостей синхронизации вычисляется при помощи формулы

$$p = \sum_{1}^{k} k_i \left[m_i + (m_i - 3)\right], \qquad (V.62)$$

где k — число наблюдавшихся положений ИСЗ, m — число направлений при данном положении спутника.

В ряде случаев уравнивание спутниковых построений выгодно выполнять в два этапа. На первом этапе в уравнивание вводятся измеренные величины, которые определяют положение в пространстве земной хорды. Для фотографических наблюдений такой метод уравнивания называют методом «замыкающих направлений». Как известно, ориентация хорды задается ее ориентирующими углами Λ и Φ, ее длина равна D_{ij}. Эти величины на втором этапе уравнивания рассматриваются как «измеренные». Поскольку эти величины являются зависимыми, на первом этапе вместе с поправками к величинам Λ°, Φ° и D° необходимо определять элементы корреляционной матрицы

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \omega_{\Lambda\Lambda} & \omega_{\Lambda\Phi} & \omega_{\Lambda D} \\ \omega_{\Phi\Lambda} & \omega_{\Phi\Phi} & \omega_{\Phi D} \\ \omega_{D\Lambda} & \omega_{D\Phi} & \omega_{DD} \end{vmatrix}. \qquad (V.63)$$

Располагая матрицей Γ, можно на втором этапе уравнивания учесть зависимость между измеренными величинами.

На каждом из двух этапов уравнивания могут применяться как параметрический способ, так и способ условий.

Пусть спутниковые построения созданы на основе лишь фотографических наблюдений ИСЗ.

Запишем уравнение плоскости синхронизации в сферических координатах

$$\Pi_k = \operatorname{tg}\delta_{ik}\sin(\Lambda_{ij} - \gamma_{jk}) + \operatorname{tg}\delta_{jk}\sin(\gamma_{ik} - \Lambda_{ij}) + \\ + \operatorname{tg}\Phi_{ij}\sin(\gamma_{jk} - \gamma_{ik}) = 0. \qquad (V.64)$$

На основе этого уравнения можно перейти к уравнению поправок

$$\zeta_k = a_k\Delta\Lambda_{ij} + b_k\Delta\Phi_{ij} + W_k, \qquad (V.65)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{\partial\Pi_k}{\partial\Lambda_{ij}} \\ b_k &= \frac{\partial\Pi_k}{\partial\Phi_{ij}} \end{aligned}\right\}, \qquad (V.66)$$

$$W_k = \operatorname{tg}\delta'_{ik}\sin(\Lambda^\circ_{ij} - \gamma'_{jk}) + \operatorname{tg}\delta'_{jk}\sin(\gamma'_{ik} - \Lambda^\circ_{ij}) + \\ + \operatorname{tg}\Phi^\circ_{ij}\sin(\gamma'_{jk} - \gamma'_{ik}). \qquad (V.67)$$

Если при наблюдениях ИСЗ фотографический метод сочетается с допплеровским и дальномерными измерениями, то в качестве неизвестных при уравнивании параметрическим способом принимают координаты спутника и координаты пункта на одном из концов хорды. В дальнейшем, используя эти величины, определяют Λ, Φ и D по формулам

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{ij} &= \operatorname{arctg}\frac{\Delta Y_{ij}}{\Delta X_{ij}} \\ \Phi_{ij} &= \operatorname{arctg}\frac{\Delta Z_{ij}}{\sqrt{\Delta X^2_{ij} + \Delta Y^2_{ij}}} \\ D_{ij} &= \sqrt{\Delta X^2_{ij} + \Delta Y^2_{ij} + \Delta Z^2_{ij}} \end{aligned}\right\}. \qquad (V.68)$$

При выполнении уравнивания на первом этапе по способу условий с дополнительными неизвестными в качестве последних принимаются Δ_Λ, Δ_Φ и Δ_D. Условное уравнение в этом случае имеет вид

$$\Sigma \nu_k v_k + a_\Pi \Delta_\Lambda + b_\Pi \Delta_\Phi + c_\Pi \Delta_D + W_\Pi = 0, \qquad (V.69)$$

где v_k есть поправки к измеренным величинам (v_γ, v_δ, v_r, $v_{\Delta r}$), коэффициенты a_Π, b_Π, c_Π есть соответствующие частные производные $\frac{\partial \Pi}{\partial \Lambda}, \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi}, \frac{\partial \Pi}{\partial D}$. Порядок системы нормальных уравнений в этом случае равен $r+3$.

На втором этапе в качестве измеренных величин принимаются значения $\Lambda_{изм}$, $\Phi_{изм}$, $D_{изм}$.

В случае уравнивания на втором этапе параметрическим способом будем иметь дело с уравнениями поправок, аналогичными (V.39), (V.43) и (V.49),

$$\left.\begin{aligned} v_{\Lambda_{ij}} &= -a dX_i - b dY_i + a dX_j + b dY_j + l_{\Lambda_{ij}} \\ v_{\Phi_{ij}} &= -c dX_i - e dY_i - f dZ_i + c dX_j + e dY_j + f dZ_j + l_{\Phi_{ij}} \\ v_{D_{ij}} &= L^\circ_{ij}(dX_j - dX_i) + M^\circ_{ij}(dY_j - dY_i) - N^\circ_{ij}(dZ_j - \\ &\quad - dZ_i) + l_{D_{ij}} \end{aligned}\right\}, \qquad (V.70)$$

причем свободные члены

$$\left.\begin{aligned} l_{\Lambda_{ij}} &= \Lambda^\circ - \Lambda_{изм} \\ l_{\Phi_{ij}} &= \Phi^\circ - \Phi_{изм} \\ l_{D_{ij}} &= D^\circ - D_{изм} \end{aligned}\right\}. \qquad (V.71)$$

Располагая для каждой хорды ориентирующими углами и длинами и применяя обобщенный принцип наименьших квадратов, приходим к системе нормальных уравнений, порядок которой $3j$ (j, как и выше, число определяемых пунктов).

Уравнивание хорд на втором этапе возможно по способу условий. В этом случае используются полюсные, базисные, координатные и компланарности трех векторов условные уравнения.

По аналогии с плоскостью пункт — спутник — пункт условие плоскости трех пунктов будет

$$\Xi = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix}, \qquad \text{(V.72)}$$

где направляющие косинусы L_i, M_i, N_i определяются при помощи формулы (V.4).

В результате линеаризации (V.72) получаем

$$\sum_1^3 \frac{\partial \Xi}{\partial \Lambda_i} v_{\Lambda_i} + \sum_1^3 \frac{\partial \Xi}{\partial \Phi_i} v_{\Phi_i} + W = 0, \qquad \text{(V.73)}$$

где

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \Lambda} = \frac{\partial \Xi}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \Xi}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \Xi}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial \Lambda}. \qquad \text{(V.74)}$$

Аналогичным образом может быть представлено $\dfrac{\partial \Xi}{\partial \Phi}$.

Свободный член W получают с использованием значений $L_{изм}$, $M_{изм}$, $N_{изм}$, вычисленных по $\Lambda_{изм}$ и $\Phi_{изм}$.

$$W = L_{изм} A_{изм} + M_{изм} B_{изм} + N_{изм} C_{изм}, \qquad \text{(V.75)}$$

причем $A_{изм}$, $B_{изм}$ и $C_{изм}$ находят по формулам вида (V.7) с соответствующей заменой направляющих косинусов.

При выборе способа уравнивания необходимо учитывать состав измерений и, как следствие, вид получаемой информации, способ построения сети, необходимую степень строгости способа уравнивания, объем вычислений, наличие определенной ЭЦВМ и сложность составления и реализации программ.

Исследование различных способов уравнивания приводит к заключению, что при фотографических наблюдениях параметрический способ не имеет существенных преимуществ перед способом условий с дополнительными неизвестными. В случае выполнения наблюдений комбинированными способами предпочтение следует отдавать параметрическому способу, так как в этом случае существенно упрощается процедура составления уравнений поправок, имеющих стандартную структуру. Последнее обстоятельство имеет важное значение при использовании ЭЦВМ.

В комбинированных сетях в случае применения параметрического способа уравнивания число нормальных уравнений составит

$$N = 3k + 3j, \tag{V.76}$$

а в способе условий с дополнительными неизвестными оно равно

$$N = \sum_{k=1}^{k} (2n - 3) + r + 3j. \tag{V.77}$$

В приведенных формулах k — число положений ИСЗ, r — число линейных измерений, n — число направлений на каждое положение ИСЗ.

Применение двухэтапного способа уравнивания уменьшает число нормальных уравнений, которые должны решаться одновременно. Так, например, в способе плоскостей на первом этапе имеем дело с системами из двух нормальных уравнений. На втором этапе, когда уравнивается построение, образованное хордами, число нормальных уравнений равно

для параметрического способа

$$N = 3j,$$

для способа условий с дополнительными неизвестными $N = 2n - 3j + 3j_0 + B$ (используются лишь направления хорд) или $N = 3n - 3j + 3j_0 + B$ (используются направления и длины хорд).

В приведенных формулах n — число хорд, j — число определяемых пунктов, j_0 — число исходных пунктов, B — число исходных базисов.

Специалистами выработаны следующие рекомендации по использованию разных способов уравнивания [9].

1. Нецелесообразно применять в комбинированных построениях способ условий с дополнительными неизвестными.

2. При малых расстояниях между пунктами, когда большинство положений ИСЗ наблюдают более чем с двух пунктов, следует применять параметрический способ уравнивания.

3. Если спутник в большинстве случаев наблюдается с двух пунктов, а длины хорд велики, то при обработке фотографических наблюдений надо вести уравнивание по способу плоскостей.

4. На значительной территории (при разновременности наблюдений и в случае постепенного накапливания материалов) следует применять двухэтапный способ уравнивания.

Помимо оценки точности спутниковых построений непосредственно по результатам наблюдений, важное значение имеет априорная оценка точности. Она позволяет составлять оптимальные проекты спутниковых построений, согласовывая точностные, временные и технико-экономические аспекты работ.

Наиболее важное значение при априорной оценке точности имеет вычисление ошибки положения пункта наблюдений и ее зависимости от продвига фигуры. Поставленная задача решается с использованием формул для вычисления ошибок элементов космических геодезических построений (вектора пункт—спутник, положения синхронной плоскости, элементов хорды и т. д.), для оценки точности элементарных фигур. Далее переходят к оценке точности положений пунктов в рядах или сплошных сетях спутниковых построений. В результате выполнения априорной оценки точности составляют суждение о геометрической структуре построений, о зависимости точности от количества измерений. При этом должны учитываться ошибки измерений и исходных данных.

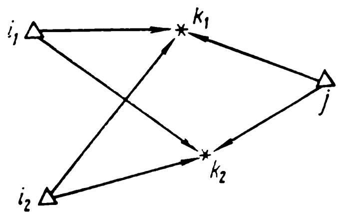

Рис. 54. К вычислению средней квадратической ошибки положения пункта

В качестве примера рассмотрим вычисление средней квадратической ошибки положения пункта, определяемого пространственной угловой засечкой (рис. 54).

Из рис. 54 следует, что мы имеем дело с тремя пространственными угловыми засечками, которые определяют положения спутника в точках k_1 и k_2 и положение пункта наблюдений j.

Вследствие ошибок наблюдений векторы, изображенные на рис. 54, не будут пересекаться в точках k_1, k_2 и j, а будут скрещиваться. Для получения в ходе обработки координат спутника или пункта наблюдений необходимо упомянутые векторы, во-первых, привести в плоскость засечки и, во-вторых, найти вероятнейшее значение положения вершины засечки. В соответствии с этим ошибка положения вершины засечки будет равна

$$M^2 = m'^2 + m''^2. \qquad \text{(V.78)}$$

В (V.78) m' есть среднее квадратическое значение смещения обоих направлений, характеризующее удаление плоскости засечки от определяемого пункта и вычисляемое по формуле

$$m'^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_{H_1}^2 m_{H_2}^2}{m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2}\right), \qquad \text{(V.79)}$$

где m_H — среднее квадратическое значение линейного смещения направления, равное

$$m_H = r m_\beta, \qquad \text{(V.80)}$$

m_β — средняя квадратическая ошибка направления.

Второе слагаемое в (V.78) зависит от угла ω при вершине засечки и равно

$$m''^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2}{\sin^2\omega}\right). \qquad (V.81)$$

Подставляя (V.79) и (V.81) в (V.78), получим

$$M^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_{H_1}^2 m_{H_2}^2}{m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2} + \frac{m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2}{\sin^2\omega}\right). \qquad (V.82)$$

Если $m_{H_1} = m_{H_2} = m_H$, то

$$M^2 = m_H^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sin^2\omega}\right). \qquad (V.83)$$

Так как первое слагаемое в (V.83) не может быть больше $\frac{1}{4}$ второго, то для практических целей можно ограничиться

$$M^2 = \frac{m_H^2}{\sin^2\omega}. \qquad (V.84)$$

С учетом (V.80) строгая формула для определения ошибки положения спутника k_1 имеет вид

$$M_{k_1}^2 = \frac{m_\beta^2}{2}\left(\frac{r_{i_1k_1}^2 \cdot r_{i_2k_1}^2}{r_{i_1k_1}^2 + r_{i_2k_1}^2} + \frac{r_{i_1k_1}^2 + r_{i_2k_1}^2}{\sin^2\omega}\right). \qquad (V.85)$$

Аналогичным образом могут быть получены ошибки M_{k_2} и M_j.

Теперь не представляет труда определить значение M_j с учетом ошибок M_{k_1} и M_{k_2}, имея в виду, что влияние этих ошибок может быть представлено формулой

$$M^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{M_{k_1}^2 M_{k_2}^2}{M_{k_1}^2 + M_{k_2}^2} + \frac{M_{k_1}^2 + M_{k_2}^2}{\sin^2\omega}\right). \qquad (V.86)$$

§ 6. Определение масштаба построений

В космические геодезические построения, создаваемые путем фотографических наблюдений, включают «космические базисы». Они представляют собой длины некоторых хорд, соединяющих пункты космических геодезических построений. Эти длины получают из комплекса высокоточных линейных и угловых измерений, астрономических и гравиметрических работ, выполненных на поверхности Земли.

В уравнивание при этом могут быть введены уравнения поправок космических базисов, вид которых аналогичен (V.49). Вес «базисного» уравнения поправок выводится из оценки точности соответствующих геодезических работ, выполненных при создании базиса.

В качестве базисов в космических геодезических построениях могут использоваться также расстояния пункт — спутник или спутник — спутник. Наивысшая точность при этом достигается в том случае, если измерения выполняются с помощью лазеров.

В динамических задачах, как отмечалось выше, масштаб построений устанавливается с использованием гравитационного параметра fM.

Чтобы точность базиса находилась в соответствии с точностью определения направлений из фотографических наблюдений (0,4—1,0″), необходимо довести ее до 1 : 300 000—1 : 500 000.

§ 7. Установление связи между отдельными геодезическими системами

Полученное выше уравнение (V.3) об относительном положении позволяет определить взаимное положение пунктов на земной поверхности. При этом предполагается, что пункты наблюдений относятся к одной системе координат.

Задача осложняется, если необходимо связать пункты, относящиеся к разным, геодезически не связанным референцным системам. Пусть референцные системы характеризуются параметрами:

система I: a_1, e_1^2, $(\Delta x_0)_1$, $(\Delta y_0)_1$, $(\Delta z_0)_1$, $(\psi_0)_1$, $(\vartheta_0)_1$, $(\gamma_0)_1$,

система II: a_2, e_2^2 $(\Delta x_0)_2$, $(\Delta y_0)_2$, $(\Delta z_0)_2$, $(\psi_0)_2$, $(\vartheta_0)_2$, $(\gamma_0)_2$.

Причем параметры, задающие форму и размеры референц-эллипсоидов E_1 и $E_2 : a_1$, a_2, e_1^2, e_2^2 — известны, а остальные величины (ориентировка осей и взаимное положение центров референц-эллипсоидов) подлежат определению.

Эйлеровы углы ψ, ϑ и γ, характеризующие ориентацию референцной системы относительно абсолютной геоцентрической системы координат, определяют следующим образом [14].

Если геодезические координаты B, L, H станций M_i и M_k в некоторой референцной геодезической системе (X, $У$, Z) известны, то можно вычислить значения направляющих косинусов хорды M_iM_k в этой системе

$$\left.\begin{aligned} A_{ik} &= [(N_k + H_k)\cos B_k \cos L_k - (N_i + H_i)\cos B_i \cos L_i]\,\frac{1}{S_{ik}} \\ B_{ik} &= [(N_k + H_k)\cos B_k \sin L_k - (N_i + H_i)\cos B_i \sin L_i]\,\frac{1}{S_{ik}} \\ C_{ik} &= \{[N_k(1 - e^2) + H_k]\sin B_k - [N_i(1 - e^2) + H_i]\sin B_i\}\,\frac{1}{S_{ik}} \end{aligned}\right\} . \tag{V.87}$$

По синхронным наблюдениям спутников с пунктов M_i и M_k также могут быть получены направляющие косинусы этой хорды L, M, N (см. формулу V.21), которые для сравнения с (V.87) должны быть преобразованы в L', M', N' поворотом координатной системы на угол, численно равный гринвичскому звездному времени S.

При достаточной точности геодезических координат и спутниковых наблюдений расхождение между направляющими косинусами A_{ik}, B_{ik}, C_{ik} и L'_{ik}, M'_{ik}, N'_{ik} будет обусловлено разворотом осей одной системы относительно другой, т. е. углами ψ, ϑ, γ. При этом для их определения используются уравнения поправок вида

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 B_{ik} \mp \gamma_0 C_{ik} + (A_{ik} - L'_{ik}) &= (v_L)_{ik} \\ -\psi_0 A_{ik} + \vartheta_0 C_{ik} + (B_{ik} - M'_{ik}) &= (v_M)_{ik} \\ \gamma_0 A_{ik} - \vartheta_0 B_{ik} + (C_{ik} - N'_{ik}) &= (v_N)_{ik} \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(V.88)}$$

Вместо направляющих косинусов при вычислении свободных членов можно использовать топоцентрические координаты, полученные непосредственно из фотографических наблюдений (α', δ') и вычисленные на основе B, L, H (α'_r, δ'_r). Тогда вместо (V.88) получим эквивалентные им уравнения [14]

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 - \vartheta_0 \cos(S - \alpha'_{ik}) + \gamma_0 \sin(S - \alpha'_{ik}) \operatorname{tg} \delta'^2_{ik} + (\alpha'_{r_{ik}} - \alpha'_{ik}) &= v_{\alpha'_{ik}} \\ \vartheta_0 \sin(S - \alpha'_{ik}) + \gamma_0 \cos(S - \alpha'_{ik}) + (\delta'_{r_{ik}} - \delta'_{ik}) &= v_{\delta'_{ik}} \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(V.89)}$$

При числе пунктов более двух решение выполняется по способу наименьших квадратов под условием

$$[p_{\alpha'} v^2_{\alpha'}] + [p_\delta v^2_{\delta'}] = \min. \qquad \text{(V.90)}$$

После определения ψ_0, ϑ_0, γ_0 с применением описанного выше метода неизвестными в задаче о связи геодезических систем остаются координаты центров референц-эллипсоидов в абсолютной геоцентрической системе, причем по условию задачи необходимо определить только их разности

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_0 &= (\Delta x_0)_1 - (\Delta x_0)_2 \\ \Delta y_0 &= (\Delta y_0)_1 - (\Delta y_0)_2 \\ \Delta z_0 &= (\Delta z_0)_1 - (\Delta z_0)_2 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(V.91)}$$

Пусть система II должна быть преобразована в систему I. В этом случае в системе I необходимо иметь по крайней мере два пункта с известными геодезическими координатами $M_i[(B_i)_1$, $(L_i)_1$, $(H_i)_1$; $(X_i)_1$, $(Y_i)_1$, $(Z_i)_1]$; $M_k[(B_k)_1$, $(L_k)_1$, $(H_k)_1$; $(X_k)_1$,

$(Y_k)_1$, $(Z_k)_1]$, а в системе II — хотя бы один пункт $M_j[(B_j)_2$, $(L_j)_2$, $(H_j)_2$, $(X_j)_2$, $(Y_j)_2$, $(Z_j)_2]$ (рис. 55).

При наличии достаточного количества синхронных наблюдений спутников с пунктов M_i, M_j и M_k, M_j вычислим направляющие косинусы L'_{ij}, M'_{ij}, N'_{ij}, L'_{kj}, M'_{kj}, N'_{kj}.

По известным геодезическим координатам пунктов M_i и M_k найдем $S_{ik}=M_iM_k$ и направляющие косинусы $(A_{ik})_1$, $(B_{ik})_1$, $(C_{ik})_1$.

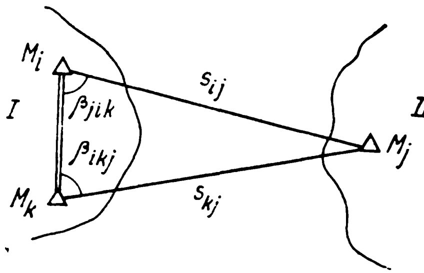

Рис. 55. К установлению связи между разными геодезическими системами

Направляющие косинусы линий M_iM_j и M_kM_j, полученные по наблюдениям спутников, переводим в систему I по формулам

$$\left.\begin{aligned}(A_{ij})_1 &= L'_{ij} - (\psi_0)_1 M'_{ij} + (\gamma_0)_1 N'_{ij}\\ (B_{ij})_1 &= M'_{ij} + (\psi_0)_1 L'_{ij} - (\vartheta_0)_1 N'_{ij}\\ (C_{ij})_1 &= N'_{ij} - (\gamma_0)_1 L'_{ij} + (\vartheta_0)_1 M'_{ij}\end{aligned}\right\}, \tag{V.92}$$

$$\left.\begin{aligned}(A_{kj})_1 &= L'_{kj} - (\psi_0)_1 M'_{kj} + (\gamma_0)_1 N'_{kj}\\ (B_{kj})_1 &= M'_{kj} + (\psi_0)_1 L'_{kj} - (\vartheta_0)_1 N'_{kj}\\ (C_{kj})_1 &= N'_{kj} - (\gamma_0)_1 L'_{kj} + (\vartheta_0)_1 M'_{kj}\end{aligned}\right\}. \tag{V.93}$$

Зная $(A_{ik})_1$, $(B_{ik})_1$, $(C_{ik})_1$ и направляющие косинусы, определенные по формулам (V.92) и (V.93), получаем углы (см. рис. 55)

$$\left.\begin{aligned}\cos\beta_{jik} &= (A_{ij})_1(A_{ik})_1 + (B_{ij})_1(B_{ik})_1 + (C_{ij})_1(C_{ik})_1\\ \cos\beta_{ikj} &= -(A_{ik})_1(A_{kj})_1 - (B_{ik})_1(B_{kj})_1 - (C_{ik})_1(C_{kj})_1\end{aligned}\right\}. \tag{V.94}$$

Из решения треугольника $M_iM_kM_j$, в котором теперь известны углы β_{jik} и β_{ikj} и сторона $S_{ik}=M_iM_k$, находим стороны $S_{ij}=$ $=M_iM_j$ и $S_{kj}=M_kM_j$. Далее определяем разности

$$\left.\begin{aligned}(X_j)_1 - (X_i)_1 &= S_{ij}(A_{ij})_1\\ (Y_j)_1 - (Y_i)_1 &= S_{ij}(B_{ij})_1\\ (Z_j)_1 - (Z_i)_1 &= S_{ij}(C_{ij})_1\end{aligned}\right\}, \tag{V.95}$$

а так как $(X_i)_1$, $(Y_i)_1$, $(Z_i)_1$ известны, то находим $(X_j)_1$, $(Y_j)_1$, $(Z_j)_1$.

Для установления связи между референцными геодезическими системами, кроме полученных раньше углов $(\psi_0)_1$, $(\vartheta_0)_1$, $(\gamma_0)_1$, $(\psi_0)_2$, $(\vartheta_0)_2$, $(\gamma_0)_2$, должны быть определены разности (V.91). Для их получения воспользуемся зависимостями (V.95), а также разностями эйлеровых углов

$$\left.\begin{aligned} \Delta\psi_0 &= (\psi_0)_1 - (\psi_0)_2 \\ \Delta\vartheta_0 &= (\vartheta_0)_1 - (\vartheta_0)_2 \\ \Delta\gamma_0 &= (\gamma_0)_1 - (\gamma_0)_2 \end{aligned}\right\}. \tag{V.96}$$

Отбрасывая квадраты элементов сдвига и поворота и их произведения, получим

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_0 &= (X_j)_2 - (X_i)_1 - S_{ij}(A_{ij})_1 - \Delta\psi_0 (Y_j)_1 + \Delta\gamma_0 (Z_j)_1 \\ \Delta y_0 &= (Y_j)_2 - (Y_i)_1 - S_{ij}(B_{ij})_1 + \Delta\psi_0 (X_j)_1 - \Delta\vartheta_0 (Z_j)_1 \\ \Delta z_0 &= (Z_j)_2 - (Z_i)_1 - S_{ij}(C_{ij})_1 - \Delta\gamma_0 (X_j)_1 + \Delta\vartheta_0 (Y_j)_1 \end{aligned}\right\}. \tag{V.97}$$

Аналогично можно было использовать значения $(X_k)_1$, $(Y_k)_1$, $(Z_k)_1$ и соответственно $(A_{kj})_1$, $(B_{kj})_1$, $(C_{kj})_1$.

§ 8. Орбитальный метод создания космических геодезических построений

В основе орбитального метода лежит уравнение (V.1). Этот метод построения сетей заключается в одновременном определении элементов орбиты E_i, положения пункта R_l и поправок ΔX_0, ΔY_0, ΔZ_0 за перенос начала референцной геодезической системы координат в центр масс Земли по совокупности измерений, выполняемых на пунктах наблюдений и связывающих мгновенное положение ИСЗ (k) с положением пункта наблюдений (l).

В отличие от динамического метода здесь не определяются параметры, характеризующие гравитационное поле Земли и верхнюю атмосферу. Данные о гравитационном поле Земли и параметрах атмосферы в соответствии с принятыми моделями вводятся в решение с целью вычисления и учета влияния возмущений на элементы орбиты. Указанные обстоятельства послужили основанием для рассмотрения орбитального метода в разделе, посвященном геометрическим задачам космической геодезии.

Из теории движения спутника известно, что его положение и скорость в некоторый момент t_k есть функции начальных условий движения и времени, т. е.

$$\left.\begin{aligned} r_k &= r_k(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_k) \\ \dot{r}_k &= \dot{r}_k(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_k) \end{aligned}\right\}. \tag{V.98}$$

Состав измерений в орбитальном методе может включать: топоцентрические экваториальные координаты α' и δ', полученные путем фотографических наблюдений ИСЗ, расстояния r' и радиальные скорости $\dot{r}'$, полученные с использованием лазерных или допплеровских измерений.

Линеаризация уравнений, связывающих измеренные величины α', δ', r', $\dot{r}'$ с координатами ИСЗ и составляющими вектора его скорости, а также с координатами пункта наблюдений, приводит к уравнениям поправок

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\sin\alpha'}{r'\cos\delta'} & \dfrac{\cos\alpha'}{r'\cos\delta'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\cos\alpha'\sin\delta'}{r'} & -\dfrac{\sin\alpha'\sin\delta'}{r'} & \dfrac{\cos\delta'}{r'} & 0 & 0 & 0 \\ \cos\alpha'\cos\delta' & \sin\alpha'\cos\delta' & \sin\delta' & 0 & 0 & 0 \\ \left\{\dfrac{\dot{x}_k}{r'}-\dfrac{\dot{r}'}{(r')^2}\Delta X\right\} & \left\{\dfrac{\dot{y}_k}{r'}-\dfrac{\dot{r}'}{(r')^2}\Delta Y\right\} & \left\{\dfrac{z_k}{r'}-\dfrac{\dot{r}'}{(r')^2}\Delta Z\right\} & \dfrac{\Delta X}{r'} & \dfrac{\Delta Y}{r'} & \dfrac{\Delta Z}{r'} \end{vmatrix}_{lk} \times \begin{vmatrix} d(x_k-X_l) \\ d(y_k-Y_l) \\ d(z_k-Z_l) \\ d\dot{x}_k \\ d\dot{y}_k \\ d\dot{z}_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_\alpha \\ l_\delta \\ l_r \\ l_{\dot{r}} \end{vmatrix}_{lk} = \begin{vmatrix} v_\alpha \\ v_\delta \\ v_r \\ v_{\dot{r}} \end{vmatrix}. \qquad (V.99)$$

В компактной записи эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial(\alpha', \delta', r', \dot{r}')_{lk}}{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_k} d(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_k' - \frac{\partial(\alpha', \delta', r', \dot{r}')_{lk}}{\partial(X, Y, Z)_l} d(X, Y, Z)_l' + L = v. \qquad (V.100)$$

В уравнениях (V.99) и (V.100) принято, что $\Delta X_0 = \Delta Y_0 = \Delta Z_0 = 0$.

Линеаризация уравнений (V.98) и подстановка результатов в (V.100) дают уравнение поправок орбитального метода

$$\frac{\partial(\alpha' \delta', r', \dot{r}')_{lk}}{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_k} \cdot \frac{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_k}{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_0} \cdot d(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_0' - \frac{\partial(\alpha', \delta', r', \dot{r}')_{lk}}{\partial(X, Y, Z)_l} \cdot d(X, Y, Z)_l' + L = v. \qquad (V.101)$$

Как следует из уравнения (V.101), в орбитальном методе определяются поправки не к координатам спутника, а к элементам орбиты на определенном временном интервале. Уравнения поправок вида (V.101) в соответствии с числом измерений составляются для каждой дуги. Эти уравнения являются частично независимыми, поэтому полученные на их основе нормальные уравнения целесообразно решать по методу Пранис-Праневича.

Для вычисления свободных членов L в каждом приближении численно или аналитически интегрируется система дифференциальных уравнений движения в оскулирующих элементах или прямоугольных координатах с возможным в настоящее время учетом всех действующих на ИСЗ сил. По полученным в результате интегрирования значениям координат и скоростей ИСЗ вычисляются приближенные, но точно соответствующие принятым начальным условиям, значения измеряемых величин и далее свободные члены.

При вычислении матрицы производных

$$\frac{\partial (x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})_k}{\partial (x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})_0},$$

значения которых нужно знать только приближенно, в уравнениях движения достаточно учитывать лишь вековые члены [10].

В случае необходимости отнести координаты к центру масс Земли в уравнения (V.101) добавляются соответствующие неизвестные ΔX_0, ΔY_0, ΔZ_0, представляющие собой координаты центра референц-эллипсоида в абсолютной системе координат с началом в центре масс Земли.

В настоящее время одной из практических реализаций орбитального метода является так называемый *метод коротких дуг*. Этот метод, в котором прогнозирование положений спутника осуществляется на отрезке траектории в пределах одного — двух оборотов на участках, охваченных наблюдениями с разных станций, иногда называют *полудинамическим*.

Применение метода коротких дуг для экстраполяции положений ИСЗ в пределах одного-двух витков с точностью порядка сотни метров требует учета вековых и короткопериодических возмущений от сжатия Земли, возмущений от тессеральных гармоник, а для спутников-баллонов — вековых возмущений вследствие давления солнечной радиации. Сопротивлением атмосферы на высотах 1000 км и более в таком случае можно пренебречь.

Орбитальный метод имеет определенные преимущества перед методом синхронных (квазисинхронных) наблюдений. Прежде всего отпадает необходимость даже в приближенной синхронизации наблюдений, что ведет к увеличению общего числа используемых в обработке результатов измерений. Поскольку координаты положений спутников не участвуют в уравнениях поправок в качестве неизвестных, то сокращается число определяемых параметров. Наконец, имеется принципиальная возможность отнести начало координат референцной геодезической системы к центру масс Земли.

Недостатком орбитального метода вообще и метода коротких дуг, в частности, является сравнительно невысокая точность. Причина этого заключается в несовершенстве теорий движения спутников, а также в неточном знании параметров гравитационного поля и атмосферы.

Напротив, если хорошо известна орбита, то этот метод является мощным средством для улучшения геометрического решения.

Дальнейшее совершенствование орбитального метода, особенно при условии применения лазерных наблюдений, позволит повысить точность определения координат наземных пунктов при одновременном увеличении протяженности дуг, на которых осуществляется прогнозирование движения ИСЗ.

В следующих параграфах рассматриваются некоторые задачи космической геодезии преимущественно геометрического характера, для решения которых необходимо знать элементы орбит спутников, т. е. надо применять рассмотренный выше орбитальный метод. В основу при этом были положены исследования М. Бурша *.

§ 9. Определение параметров общего земного эллипсоида по наблюдениям ИСЗ

Пусть общий земной эллипсоид является эллипсоидом вращения с параметрами a, e^2; его центр совпадает с центром масс Земли, малая ось — с полярной осью инерции Земли.

Уравнение эллипсоида

$$\frac{x_E^2}{a^2} + \frac{y_E^2}{a^2} + \frac{z_E^2}{b^2} = 1. \qquad (V.102)$$

Принимая во внимание, что

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \qquad (V.103)$$

и переходя к геодезической системе X, Y, Z, получим

$$(X^2 + Y^2)(1 - e^2) + Z^2 - a^2(1 - e^2) = 0. \qquad (V.104)$$

Если радиус-вектор эллипсоида направлен вдоль радиуса-точки M_0 земной поверхности (рис. 56), то можем записать уравнение

$$\frac{X}{X_0} = \frac{Y}{Y_0} = \frac{Z}{Z_0} = \frac{R}{R_0}, \qquad (V.105)$$

где R соответствует текущим координатам X, Y, Z.

---

* «Теория определения размеров общего земного эллипсоида и исходных геодезических дат по наблюдениям искусственных спутников Земли», Studia geophysica et geodaetica, 4, 1962.

«Теория определения положения центра референц-эллипсоида по наблюдениям ИСЗ», Studia geophysica et geodaetica, 3, 1965.

Совместное решение уравнений (V.104) и (V.105) дает координаты точки $M'(X', У', Z')$ на поверхности эллипсоида (см. рис. 56)

$$\left.\begin{aligned} X' &= aX_0(1-e^2)^{1/2}\,[(X_0^2+Y_0^2)(1-e^2)+Z_0^2]^{-1/2} \\ Y' &= aY_0(1-e^2)^{1/2}\,[(X_0^2+Y_0^2)(1-e^2)+Z_0^2]^{-1/2} \\ Z' &= aZ_0(1-e^2)^{1/2}\,[(X_0^2+Y_0^2)(1-e^2)+Z_0^2]^{-1/2} \end{aligned}\right\}. \quad \text{(V.106)}$$

Согласно рис. 56

$$R_0 = R' + \Delta R, \quad \text{(V.107)}$$

причем

$$R_0 = [X_0^2+Y_0^2+Z_0^2]^{1/2} \quad \text{(V.108)}$$

и

$$R' = a(1-e^2)^{1/2}\,[1-e^2 \times (X_0^2+Y_0^2)\,R_0^{-2}]^{-1/2}. \quad \text{(V.109)}$$

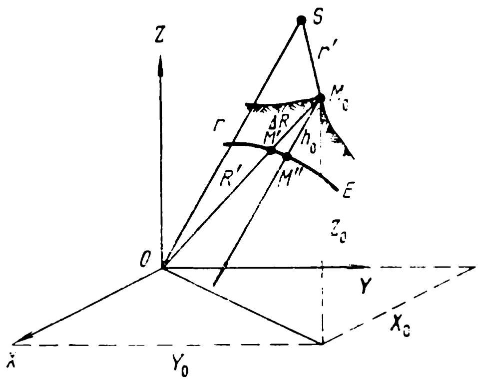

Рис. 56. К выводу параметров общего земного эллипсоида

С учетом (V.108), (V.109) можно записать

$$\Delta R = [X_0^2+Y_0^2+Z_0^2]^{1/2} - a(1-e^2)^{1/2}\,[1-e^2(X_0^2+Y_0^2)\,R_0^{-2}]^{-1/2}. \quad \text{(V.110)}$$

Пренебрегая членами порядка $a\cdot e^6$ и меньше, получим

$$\Delta R = (X_0^2+Y_0^2+Z_0^2)^{1/2} - a\left\{1-\frac{1}{2}e^2\,[1-(X_0^2+Y_0^2)\,R_0^{-2}] - \frac{1}{8}e^4\,[1+2(X_0^2+Y_0^2)\,R_0^{-2}-3\,(X_0^2+Y_0^2)\,R_0^{-4}]\right\}. \quad \text{(V.111)}$$

Если известны приближенные значения параметров общего земного эллипсоида (a_0, e_0^2), то искомыми становятся поправки к этим величинам (da, de^2), причем

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 + da \\ e^2 &= e_0^2 + de^2 \end{aligned}\right\}. \quad \text{(V.112)}$$

Так как da и de^2 — величины сравнительно небольшие, то можно пренебречь членами порядка $a_0(de^2)^2$; $dade^2$; $da(de^2)^2$; $e_0^2 a_0 de^2$ и меньшими, тогда с учетом (V.112) из (V.111) имеем

$$\Delta R = -da\left\{1-\frac{1}{2}e_0^2\,[1-(X_0^2-Y_0^2)\,R^{-2}]\right\} - \frac{1}{2}a_0 de^2\,[1-(X_0^2-Y_0^2)\,R_0^{-2}] + l, \quad \text{(V.113)}$$

где

$$l = (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)^{1/2} - a_0 \left\{1 - \frac{1}{2} e_0^2 \left[1 - (X_0^2 + Y_0^2) R_0^{-2}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8} e_0^4 \left[1 + 2(X_0^2 + Y_0^2) R_0^{-2} - 3(X_0^2 + Y_0^2) R_0^{-4}\right]\right\}. \quad (V.114)$$

Таким образом, зная из теории движения геоцентрические координаты ИСЗ, а из наблюдений — топоцентрические, при необходимом количестве наблюдений можем получить da, de^2.

Для этого, располагая a_0 и e_0^2, а также вычислив R_0 и R', составим для n пунктов, с которых выполнялись наблюдения, уравнения вида (V.113). Решение этих уравнений должно выполняться под условием

$$\sum_1^n (\Delta R)^2 = \min. \quad (V.115)$$

Если исходить из того, что общий земной эллипсоид должен лучше всего подходить квазигеоиду, то решение должно выполняться под условием

$$\sum_1^n [\Delta R - H_q \sec (B_0 - \Phi_0)]^2 = \min, \quad (V.116)$$

где H_q — нормальная высота.

Если допустима ошибка в 1 м, то вместо (V.116) можно положить

$$\sum_1^n (\Delta R - H_q)^2 = \min. \quad (V.117)$$

Свободный член в этом случае следует изменить на величину H_q.

В результате решения системы уравнений вида (V.113) определим искомые поправки da и de^2 к приближенным значениям параметров. В принципе таким же образом решается задача об определении параметров трехосного эллипсоида, только применяются более сложные формулы и преобразования.

Рассмотренный способ имеет в первую очередь методическое значение. Практически величину сжатия, а следовательно, и эксцентриситет можно определить, используя вторую зональную гармонику J_2. В этом случае (V.113) сразу дает da.

§ 10. Определение положения центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли

Пусть наблюдения спутников ведутся с пункта $M(B, L, H_q, \zeta_q)$. На основании (рис. 57) можно записать

$$\left.\begin{aligned} \Delta X &= x - x' - X - \delta X(\psi, \vartheta, \gamma) \\ \Delta Y &= y - y' - Y - \delta Y(\psi, \vartheta, \gamma) \\ \Delta Z &= z - z' - Z - \delta Z(\psi, \vartheta, \gamma) \end{aligned}\right\}. \quad (V.118)$$

Заменяя значения координат, входящих в правую часть (V.118) в соответствии с формулами преобразования координат (см. гл. I), имеем

$$\left.\begin{aligned}\Delta X &= r[\cos u\cos(\Omega-S)-\sin u\sin(\Omega-S)\cos i]-\\&-N'\cos B\cos L-r'\cos\delta'\cos(\alpha'-S)-\gamma N'\cos B\sin L+\\&+\vartheta\overline{N}\sin B\\\Delta Y &= r[\cos u\sin(\Omega-S)+\sin u\cos(\Omega-S)\cos i]-\\&-N'\cos B\sin L-r'\cos\delta'\sin(\alpha'-S)+\gamma N'\cos B\cos L-\\&-\psi\overline{N}\sin B\\\Delta Z &= r\sin u\sin i-\overline{N}\sin B-r'\sin\delta'-N'\cos B\times\\&\times(\vartheta\cos L-\psi\sin L)\end{aligned}\right\},\qquad (V.119)$$

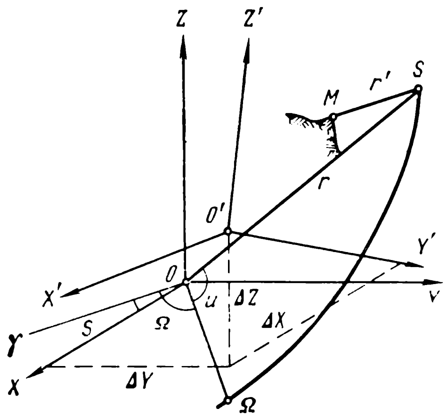

Рис. 57. К определению положения центра референц-эллипсоида относительно центра масс

где

$$\left.\begin{aligned}N' &= N+H_q+\zeta_q\\N &= a(1-e^2\sin^2 B)\\\overline{N} &= N'-Ne^2\\u &= \omega+v\end{aligned}\right\},\qquad (V.120)$$

ζ_q — аномалия высоты.

Если углы ψ, ϑ, γ определены заранее, например, по способу, описанному выше, x, y, z известны из теории движения спутника, x', y', z' — из наблюдений, X, Y, Z вычислены по геодезическим координатам пункта $M: B, L, H$, то неизвестными останутся только левые части уравнений (V.118) или (V.119), т. е. координаты центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли.

При практическом решении задачи для увеличения точности следует пользоваться не самой орбитой, а ее плоскостью, уравнение которой можно записать в виде

$$X \sin(\Omega - S) \sin i - Y \cos(\Omega - S) \sin i + Z \cos i = 0. \quad (V.121)$$

В результате замены геоцентрических координат X, Y, Z через геодезические, с учетом сдвига и поворота референцной системы, получаем уравнение поправок

$$(\Delta X + \gamma N' \cos B \sin L - \vartheta \bar{N} \sin B) \sin(\Omega - S) \sin i -$$
$$- (\Delta Y - \gamma N' \cos B \cos L - \psi \bar{N} \sin B) \cos(\Omega - S) \sin i +$$
$$+ [\Delta Z + N' \cos B (\vartheta \cos L - \psi \sin L)] \cos i + l = v, \quad (V.122)$$

где

$$l = [N' \cos B (\Omega - S - L) + r' \cos \delta' \sin(\Omega - \alpha') \sin i +$$
$$+ (\bar{N} \sin B + r' \sin \delta')] \cos i. \quad (V.123)$$

Если эйлеровы углы ψ, ϑ и γ определены отдельно, то тогда имеем уравнение поправок

$$\Delta X \sin(\Omega_n - S_n) \sin i_n - \Delta Y \cos(\Omega_n - S_n) \sin i_n +$$
$$+ \Delta Z \cos i_n + l'_{in} = v_{in}, \quad (V.124)$$

где

$$l'_{in} = l_{in} + N'_i \cos B_i [(\gamma \sin i_n \cos(\Omega_n - S_n - L_i) +$$
$$+ (\vartheta \cos L_i - \psi \sin L_i) \cos i_n] - \bar{N}_i \sin B_i \sin i_n \times$$
$$\times [\vartheta \sin(\Omega_n - S_n) + \psi \cos(\Omega_n - S_n)]. \quad (V.125)$$

Таким образом, вместо уравнений (V.122) с шестью неизвестными получили уравнения, содержащие только три неизвестных.

В уравнениях (V.124), (V.125) n — номер наблюдаемого ИСЗ, i — номер пункта наблюдений на поверхности Земли с известными геодезическими координатами.

Наиболее точно задача будет решена в том случае, если пункты в единой системе референц-эллипсоида будут расположены на значительной территории Земли и наблюдаются спутники, движущиеся по разным орбитам (разные Ω и i).

Если известны все восемь параметров, определяющих референцную геодезическую систему, из теории движения — геоцентрические координаты спутника, а из наблюдений — топоцентрические, то в соответствии с формулами (V.119) по результатам наблюдений спутников могут быть определены геодезические координаты точки M_i, т. е. исходные геодезические даты B_0, L_0, H_0. Однако практическая реализация такой задачи не представляет особого интереса.

§ 11. Основы проектирования космических геодезических построений

В зависимости от поставленных задач могут применяться три вида космических геодезических построений.

Для обеспечения единой системой координат значительной территории на поверхности Земли, для получения системы пунктов определенной плотности создаются сплошные сети.

Передача координат на значительные расстояния, установление связи между разными геодезическими системами осуществляются прокладкой рядов или так называемых векторных ходов.

К третьему виду космических геодезических построений относятся отдельные фигуры, которые используются для определения положения отдельных пунктов, например для привязки островов.

Каждое построение может рассматриваться как сочетание отдельных элементарных фигур.

Особенности космических геодезических построений заключаются в том, что наблюдения в них являются односторонними (с наземных пунктов на спутники) и положения спутников определяются менее надежно, чем положения наземных пунктов.

Создание космических геодезических построений любого вида начинается с составления проекта.

В процессе проектирования решаются следующие задачи.

1. В соответствии с поставленной задачей выбирается тот или иной вид построений.

2. Определяется необходимая плотность пунктов и точность определения их координат.

3. В зависимости от требуемой точности, с учетом временного фактора, при условии минимальных трудовых и материальных затрат определяются положения, в которых следует наблюдать спутник (спутники).

4. Решение задачи в соответствии с содержанием пункта 3 приводит к необходимости установить требования к параметрам орбит ИСЗ.

5. Оптимизация проектируемых положений спутников должна выполняться с учетом обеспечения условий видимости (пункт-спутник). При этом должно быть задано минимальное значение высоты спутника над горизонтом, учтено влияние астрономической или электронной рефракции, приняты во внимание возможности применяющейся аппаратуры. В случае использования пассивных спутников интервал времени, пригодный для наблюдений, должен быть определен таким образом, что-

бы обеспечить освещенность спутника Солнцем и возможность его фотографирования на фоне звезд.

При проектировании пользуются априорными формулами, позволяющими предвычислять точностные характеристики отдельных элементов спутниковых построений, в том числе и ошибки определения положений пунктов и спутников.

Наиболее эффективным способом создания оптимального проекта является математическое моделирование с использованием ЭЦВМ.

В отдельных случаях при проектировании приходится учитывать некоторые дополнительные требования, например ограничения, обусловленные физико-географическими условиями на пункте наблюдений, необходимость использовать запущенные раньше спутники.

Завершается проектирование расчетом необходимого количества измерений и эфемерид ИСЗ для организации наблюдений с вычислением каждого из пунктов построения.

Кроме определения точностных характеристик важное значение при проектировании построений в виде ряда имеет определение оптимальных условий передачи координат, т. е. получение при минимальном числе пунктов минимальной относительной ошибки

$$\frac{M_n}{L} = \min, \tag{V.126}$$

где M_n — ошибка положения последнего пункта, L — длина ряда.

Вопросы проектирования космических геодезических построений подробно рассмотрены в монографии [9].

§ 12. Построение мировой геодезической системы и сетей сгущения

Еще на XIII Ассамблее МГА (1963 г.) были выдвинуты предложения по построению мировой геодезической сети.

В 1964 г. в США Междуведомственной рабочей группой с участием NASA была разработана национальная геодезическая спутниковая программа США (NGSP). Согласно этой программе планировалось определить с точностью 10 м геоцентрические координаты 86 опорных пунктов на поверхности Земли, связать при этом все основные геодезические системы и построить таким образом мировую геодезическую систему.

В 1966 г. в США был запущен спутник-баллон PAGEOS. На основе наблюдений этого спутника фотографическим методом планировалось создать мировую геодезическую сеть более чем из 40 станций с расстоянием между ними 2000—5000 км (с ошибкой положения пункта 10 м). Из предварительного уравнивания ошибки по высоте в этой сети составили ± 11—± 15 м, а в плане $\pm 5 - \pm 10$ м. В настоящее время работы по программе PAGEOS завершены. По оценке Шмидта точность определения координат пунктов сети характеризуется следующими ошибками: по высоте 5,6 м, по долготе и широте 3,1 м.

После завершения работ по созданию мировой геодезической сети и на ее основе можно развить континентальные сети. Точность завершенной континентальной сети Северной Америки по предварительным подсчетам составит 2 м в плане и 3 м по высоте.

И. Д. Жонголовичем (1965 г.) был предложен проект мировой геодезической сети из 12 пунктов с длинами хорд $D = 6700$ км, с высотой спутника 12 300 км, со средним расстоянием между наземными пунктами 14 000 км, что соответствует углу засечки при спутнике $\omega = 28°$. Проект этот не был реализован.

В 1969 г. И. Д. Жонголович предложил проект геодезического векторного хода Арктика — Антарктика. Работы по реализации этого хода были начаты в рамках программы ISAGEX и продолжаются в настоящее время. Общая протяженность хода 17 000 км, средняя длина отдельной хорды порядка 2200 км. Ход соединяет пункты Баренцбург — Звенигород — Каир — Могадишо — о. Реюньон — о. Кергелен — Мирный. Длина стягивающей хорды 12 400 км. По результатам синхронных наблюдений ИСЗ элементы отдельных векторов (хорд) должны быть получены с точностью $2 \cdot 10^{-6}$. Это потребует около 30 пар синхронных наблюдений для определения каждого вектора при условии, что направления будут получены с ошибкой не более 1″, а дальности с ошибкой не более 1—2 м.

В настоящее время не вызывает сомнений, что наиболее ценные в научном и практическом отношении результаты получаются из совместного использования наземных и спутниковых данных. Это относится и к созданию космических геодезических построений. По мнению ряда ученых [42], мировая геодезическая сеть должна строиться со сторонами порядка 4000—5000 км. На ее основе должны создаваться континентальные сети со сторонами 1500—2000 км. Дальнейшее сгущение (сеть «нулевого класса») целесообразно получать наземными методами. Однако азимуты образуемых при этом звеньев длиной в 200—300 км целесообразно определять методом «звездной триангуляции» Вяйсяля из наблюдений светящихся ракет на фоне звезд. Детальная разработка метода определения геодезического азимута линии по синхронным наблюдениям с ее концов дана К. Арнольдом [61]. В отдельных случаях, например по линии Брауншвейг — Мюнхен (ФРГ), точность определения геодезического азимута по внутренней сходимости состава 0,22″, а из сравнения с наземной триангуляцией точность составила 0,60″. Азимут линии Потсдам — Бухарест по синхронным наблюдениям ИСЗ Echo 1 определен с ошибкой 1,6″.

Глава VI

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

§ 1. Сущность динамических задач

В литературе [3], [30] динамические задачи космической геодезии определяются не вполне однозначно. Поэтому мы будем исходить из существа проблемы.

Под динамическими задачами космической геодезии будем понимать такие задачи, при решении которых существенным образом используется теория движения ИСЗ *. Эта теория используется, конечно, и в геометрических задачах, но в меньшей степени — главным образом для расчета эфемерид спутников с той или иной степенью приближения. В динамических же задачах теория движения ИСЗ используется с наибольшей возможной точностью.

Динамические задачи можно разделить на два типа.

I. Определение и уточнение параметров геопотенциала по возмущениям орбит ИСЗ.

II. Совместное определение параметров геопотенциала и координат пунктов наблюдений по наблюдаемым возмущенным положениям спутников. Одновременно определяются параметры верхней атмосферы.

Сущность задач первого типа заключается в следующем. Пусть в некоторые моменты времени t_1, t_2, t_3... методами, описанными в гл. II, определены элементы орбиты спутника (или спутников) соответственно $Э_{j1}$, $Э_{j2}$, $Э_{j3}$..., $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$. Пусть также в этих элементах учтены все возмущения, кроме возмущений от геопотенциала. Тогда любая разность $Э_{j2}—Э_{j1}$, $Э_{j3}—Э_{j1}$, $Э_{j3}—Э_{j2}$ и т. д. будет являться функцией параметров геопотенциала.

Указанные разности являются числовыми значениями возмущений от геопотенциала в элементах орбиты за промежутки времени, соответственно $t_2—t_1$, $t_3—t_1$, $t_3—t_2$ и т. д. Подставив

* Это означает, что задача принципиально не может быть решена по данным одних лишь наблюдений ИСЗ без привлечения его точной теории движения.

найденные значения возмущений в формулы для возмущений от геопотенциала, получим алгебраические уравнения вида

$$Э_{jk} - Э_{js} = F_{2jks} \cdot J_2 + F_{3jks} J_3 + \ldots, \qquad (VI.1)$$

в которых $Э_{jk} - Э_{js}$ — свободные члены, F_{2jks}, F_{3jks} и т. д. — известные коэффициенты, зависящие от элементов орбиты и моментов времени t_k, t_s, J_2, J_3 и т. д. — искомые параметры геопотенциала. Если число уравнений вида (VI.1) не меньше числа искомых параметров геопотенциала, то уравнения (VI.1) могут быть решены. Обычно число уравнений избыточно и их решают по способу наименьших квадратов. В конкретной методике решения существенно используются вековые и долгопериодические возмущения.

Задачи второго типа основаны на следующих соображениях. Пусть q_o — какая-либо из координат спутника, найденная из наблюдений в некоторый момент времени с пункта, координаты которого необходимо уточнить. Пусть также на момент наблюдений по теории движения ИСЗ вычислены теоретические координаты спутника q_c учтя по возможности все возмущения. Причем вычисления возмущенных координат ИСЗ проведены с той же точностью, с какой выполнены наблюдения, независимо от точности, с какой известны параметры, характеризующие возмущения. Если бы все возмущающие параметры и координаты пункта были безошибочны, то наблюденная координата q_o совпала бы с вычисленной q_c. В действительности такого совпадения нет. Поэтому разность $q_o - q_c$ является функцией искомых поправок в возмущающие параметры, начальные условия движения и координаты пункта. Для разностей указанного типа принято общее обозначение «*o—c*» — Observatum minus calculatum, т. е. «наблюденное минус вычисленное». Полагая, что лунно-солнечные возмущения, возмущение от светового давления и возмущения от второстепенных факторов учтены достаточно точно, можно считать, что из возмущающих параметров поправок требуют параметры геопотенциала и параметры верхней атмосферы. Пусть наблюдения произведены с многих пунктов во многие моменты времени, так что получено n разностей «*o—c*». Разлагая каждую разность в ряд по степеням искомых поправок, ограничиваясь первыми степенями разложения, или, как принято говорить, линеаризируя разности «*o—c*», получим n линейных алгебраических уравнений вида

$$q_o - q_c = \sum_s \left(\frac{\partial q}{\partial X_s} \Delta X_s + \frac{\partial q}{\partial Y_s} \Delta Y_s + \frac{\partial q}{\partial Z_s} \Delta Z_s \right) +$$

$$+ \frac{\partial q}{\partial \Omega_0} \Delta\Omega_0 + \frac{\partial q}{\partial \omega_0} \Delta\omega_0 + \frac{\partial q}{\partial i_0} \Delta i_0 + \frac{\partial q}{\partial a_0} \Delta a_0 + \frac{\partial q}{\partial e_0} \Delta e_0 +$$

$$+ \frac{\partial q}{\partial M_0} \Delta M_0 + \frac{\partial q}{\partial J_2} \Delta J_2 + \frac{\partial q}{\partial J_3} \Delta J_3 +$$

$$+ \ldots + \frac{\partial q}{\partial \rho_0} \Delta \rho_0 + \frac{\partial q}{\partial H} \Delta H + \ldots \qquad \text{(VI.2)}$$

Здесь: $q_o - q_c$ — свободные члены (разности «о—с»), ΔX_s, ΔY_s, ΔZ_s — поправки в координаты пунктов, $\Delta\Omega_0$, $\Delta\omega_0$, ... ΔM_0 — поправки в начальные элементы орбиты ИСЗ, ΔJ_2, ΔJ_3, ... — поправки в параметры геопотенциала, $\Delta\rho_0$, ΔH, ... — поправки в параметры атмосферы (в соответствии с § 20 гл. II, $\Delta\rho_0$ — поправки в плотности, ΔH — в шкалу высот *.

Выражения для производных, являющихся коэффициентами уравнений (VI.2), могут быть в принципе получены дифференцированием явных выражений координат спутника по соответствующей переменной. Эти производные зависят от начальных условий движения и времени, а значит, могут быть вычислены.

Если число n уравнений (VI.2) превышает число неизвестных, то рассматривая (VI.2) как уравнение погрешностей, можно составить систему нормальных уравнений. Решив эту систему, найдем вероятнейшие значения искомых поправок.

Динамический метод, сущность которого только что описана, хотя и более сложен, чем геометрические методы, но принципиально гораздо более выгоден, так как автоматически дает положения пунктов относительно центра масс Земли. Это объясняется тем, что теория движения ИСЗ, используемая в методе, всегда дает координаты спутника относительно центра масс Земли. Геометрические же методы позволяют определять лишь взаимное расположение пунктов.

§ 2. Определение зональных гармоник геопотенциала

Рассмотрим общую задачу определения зональных параметров геопотенциала.

Будем исходить из следующих свойств возмущений, вызываемых в орбите ИСЗ зональными гармониками геопотенциала.

1. Зональные гармоники геопотенциала вызывают вековые возмущения лишь в угловых элементах орбиты спутника Ω, ω и M_0.

2. Большая полуось орбиты содержит лишь короткопериодические возмущения.

3. Наиболее значительные вековые возмущения от четных зональных гармоник в угловых элементах пропорциональны $J_n (n=2, 4, 6, 8, \ldots)$, от нечетных гармоник — пропорциональны $eJ_n (n=3, 5, 7, 9, \ldots)$, где e — эксцентриситет орбиты, если использовать элементы (II.131); в обычных элементах вековых возмущений от нечетных гармоник нет.

* Здесь нужно вводить еще ряд поправок, но их описание выходит за рамки книги.

4. Амплитуды долгопериодических возмущений от четных зональных гармоник в долготе узла Ω имеют порядок e^2J_2, в долготе перицентра $\omega \to eJ_2$, в начальном значении средней аномалии $M_0 - (1+e)J_2$; амплитуды долгопериодических возмущений от нечетных гармоник имеют порядок, соответственно eJ_2 — в узле, J_2 — в долготе перицентра, $\left(1+\frac{1}{e}\right)J_2$ — в M_0.

5. Амплитуды долгопериодических возмущений в наклоне орбиты i от четных гармоник имеют порядок e^2J_2, от нечетных — eJ_2. Амплитуды долгопериодических возмущений в эксцентриситете орбиты e имеют порядок соответственно eJ_2 и J_2.

6. Период долгопериодических возмущений равен периоду обращения перицентра орбиты под действием второй зональной гармоники.

7. Наиболее крупные вековые возмущения от атмосферного торможения содержатся в большой полуоси a, эксцентриситете e и начальном значении средней аномалии M_0. В долготе узла Ω и долготе перицентра ω эти возмущения в тысячу раз меньше, так как они пропорциональны J_2.

Наиболее выгодными для определения зональных параметров являются те элементы орбиты, в которых содержатся наиболее крупные возмущения от искомых параметров.

Пусть методами, описанными во второй главе, определены системы элементов орбиты некоторого спутника Э_0, Э_1, Э_2, ..., Э_j, ... для эпох в системе всемирного времени UT_0, UT_1, UT_2, ..., UT_j, ... Через Э обозначен для краткости любой из элементов орбиты. Все элементы приведены к эпохе и равноденствию стандартной эпохи 1950.0. Заметим, что может быть выбрана и любая другая эпоха; это не имеет принципиального значения. Поставим в соответствие эпохам интервалы времени:

$$t_0 = UT_0 - UT_0 \equiv 0, \quad t_1 = UT_1 - UT_0, \quad t_2 = UT_2 - UT_0, \; . \; . \; ., \quad t_j = UT_j - UT_0.$$

Тогда любой из элементов j-й системы можно представить так:

$$\text{Э}_j = \text{Э}_0 + \delta\text{Э}_j, \tag{VI.3}$$

где $\delta\text{Э}_j$ — суммарное возмущение от всех факторов за интервал t_j. Это возмущение представим следующим образом:

$$\delta\text{Э}_j = \delta\bar{\text{Э}}_{\oplus j} + \delta\tilde{\text{Э}}_{\oplus j} + \delta\tilde{\tilde{\text{Э}}}_{\oplus j} + \delta\text{Э}_{\text{☾} j} + \delta\text{Э}_{\odot j} + \delta\text{Э}_{\text{ат}\, j} + \delta\text{Э}_{\text{св}\, j} + J_2^2\delta\text{Э}^{(2)}_{\oplus j} + \delta\text{Э}(\lambda)_j + \text{члены порядка } J_2^3 \text{ и выше.} \tag{VI.4}$$

Здесь $\delta\bar{\text{Э}}_{\oplus j}$, $\delta\tilde{\text{Э}}_{\oplus j}$, $\delta\tilde{\tilde{\text{Э}}}_{\oplus j}$ — соответственно вековые, долгопериодические и короткопериодические возмущения первого порядка от зональной части геопотенциала; $\delta\text{Э}_{\text{☾} j}$ и $\delta\text{Э}_{\odot j}$ — возмущения первого порядка от Луны и Солнца; $\delta Э_{\text{ат}j}$ и $\delta Э_{\text{св}j}$ — возмущения от атмосферного торможения и светового давления; $J_2^2 \delta Э_{\oplus j}^{(2)}$ — возмущения второго порядка от второй зональной гармоники; $\delta \tilde{Э}(\lambda)_j$ — возмущения первого порядка от долготной части геопотенциала.

Все эти возмущения рассчитываются методами, описанными во второй главе, причем атмосферные возмущения могут быть учтены лишь с той точностью, с какой это позволяет сделать принятая модель атмосферы. Приближенные значения параметров геопотенциала можно считать известными. Обозначим

$$\delta \widehat{Э}_j = \delta \tilde{\bar{Э}}_{\oplus j} + \delta Э_{☾ j} + \delta Э_{\odot j} + \delta Э_{\text{ат}\, j} + \delta Э_{\text{св}\, j} + J_2^2\, \delta Э_{\oplus j}^{(2)} + \delta \bar{Э}\, (\lambda)_j. \tag{VI.5}$$

Вычислив методами теории возмущений значения $\delta \widehat{Э}_j$, найдем возмущенные элементы, свободные от влияния суммарных возмущений (VI.5):

$$Э_j' = Э_0 + \delta \bar{Э}_{\oplus j} + \delta \tilde{Э}_{\oplus j}, \quad (Э_j' = Э_0 + \delta Э_j - \delta \widehat{Э}_j), \tag{VI.6}$$

где для угловых элементов вековую часть можно записать как

$$\delta \bar{Э}_{\oplus j} = \dot{\bar{Э}}_{\oplus} t_j, \tag{VI.7}$$

причем, согласно теории возмущений

$$\dot{\bar{Э}}_{\oplus} = J_2 N_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 x_2(e)\, F_2(i) + J_4 N_4 \left(\frac{r_0}{a}\right)^4 x_4(e)\, F_4(i) + \ldots + \underbrace{\left(e J_3 N_3 \left(\frac{r_0}{a}\right)^3 x_3(e)\, F_3(i) + \ldots\right)}_{\text{в общем случае эти члены равны нулю}}. \tag{VI.8}$$

Здесь N_2, N_4, ... — некоторые числовые коэффициенты, $x_2(e)$, $x_4(e)$, ... — функции эксцентриситета орбиты, выражающиеся через коэффициенты Ганзена, $F_2(i)$, $F_4(i)$, ... — функции наклона орбиты; r_0 — средний экваториальный радиус Земли, a — большая полуось орбиты.

Долгопериодическую часть в (VI.6) можно представить тригонометрическим рядом относительно долготы перицентра ω_j

$$\delta \tilde{Э}_{\oplus j} = \sum_k (A_{Эk} \cos k\omega_j + B_{Эk} \sin k\omega_j), \tag{VI.9}$$

где амплитуды, согласно теории возмущений, представляют собой ряды

$$A_{Эk} = J_3 \Phi_3 (a, e, i) + J_5 \Phi_5 (a, e, i) + \ldots + e^s J_2 \Phi_2 (a, e, i) + e^s J_4 \Phi_4 (a, e, i) + \ldots, \tag{VI.10}$$

$$B_{эk} = J_3\Phi_3'(a, e, i) + J_5\Phi_5'(a, e, i) + \ldots + e^s J_2\Phi_2'(a, e, i) + \\ + e^s J_4\Phi_4'(a, e, i) + \ldots.$$

Функции большой полуоси, эксцентриситета и наклона Φ и Φ' по своей структуре сходны с коэффициентами при J_n в (VI.8); показатель степени s принимает значения не меньше единицы. До настоящего времени в разложениях типа (VI.9) при определении параметров J_n принимались во внимание только первые члены, имеющие период, равный периоду обращения перигея под действием сжатия Земли. Обычно используют элементы, на которые влияние атмосферного торможения минимально: долготу узла, долготу перицентра, наклон орбиты. Применяют также уравнение и для эксцентриситета, хотя влияние атмосферы здесь существенно. После выполнения описанных операций для этих элементов можно написать уравнения

$$\left.\begin{aligned} \Omega_j' &= \overline{\Omega}_0 + \dot{\Omega} t_j + A_\Omega \cos\omega_j + \ldots \\ \omega_j' &= \overline{\omega}_0 + \dot{\omega} t_j + A_\omega \cos\omega_j + \ldots \\ i_j' &= \overline{i}_0 + B_i \sin\omega_j + \ldots \\ e_j' &= \overline{e}_0 + B_e \sin\omega_j + \ldots \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(VI.11)}$$

Такие уравнения использовались, например, в работе [54]. Через $\overline{\Omega}_0$, $\overline{\omega}_0$, $\overline{i}_0$, $\overline{e}_0$ обозначены величины $\Omega_0+\delta\Omega_0$, $\omega_0+\delta\omega_0$, $i_0+\delta i_0$, $e_0+\delta e_0$, где $\delta\Omega_0$, $\delta\omega_0$ и т. д. — поправки к начальным значениям элементов. Неизвестными в уравнениях (VI.11) являются: 1) $\delta\Omega_0$, $\dot{\Omega}$, A_Ω; 2) $\delta\omega_0$, $\dot{\omega}$, A_ω; 3) δi_0, B_i; 4) δe_0, B_e. Используя все системы элементов, каждое из уравнения (VI.11) можно решить по способу наименьших квадратов и определить все неизвестные. Строго говоря, в уравнение для эксцентриситета следует добавить члены вида $\alpha t_j + \beta t_j^2 + \ldots$, где α, β, ... — дополнительные неизвестные, возникающие из-за неполного учета атмосферного торможения.

Предположим, что перечисленные неизвестные найдены. Коэффициенты $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$ используются для определения четных параметров J_n, амплитуды A_Ω, A_ω, B_i, B_e — для определения нечетных параметров. Теперь исходными уравнениями являются уравнения вида (VI.8) для вековых коэффициентов $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$ и уравнения вида (VI.10) для амплитуд. В первом приближении в уравнениях вида (VI.8) следует отбросить члены с нечетными коэффициентами.

Если использовался лишь один спутник, то уравнения (VI.8) для $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$ позволяют определить только коэффициенты J_2 и J_4, а амплитуды — коэффициенты J_3, J_5, J_7, J_9, причем такое определение будет искажено влиянием остальных коэффициентов.

По этой причине часто говорят, что из возмущений элементов орбиты одного спутника можно найти лишь некоторую последовательность линейных комбинаций коэффициентов.

Поэтому для определения достаточно большой последовательности зональных параметров геопотенциала необходимо использовать различные спутники с разными наклонами орбиты i и разными эксцентриситетами. Тогда уравнения вида (VI.8) и (VI.10) можно рассматривать как уравнения погрешностей и решать их по способу наименьших квадратов. При этом удобнее искать не сами параметры, а поправки к ним. Для этого составляют разности *«о—с»*, уравнения же (VI.8) и (VI.10) сохраняют свою форму. Например, для (VI.8) будем иметь

$$\Delta\dot{\bar{Э}}'_j = \Delta J_2 \cdot N_2 \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 x_2(e) F_2(i) + \ . \ . \ ., \qquad \text{(VI.8')}$$

где $\Delta\dot{\bar{Э}}'_j = \dot{\bar{Э}}'_j o - \dot{\bar{Э}}'_j c$, $\Delta J_2 = J_2 - J_2^{(0)}$; $J_2^{(0)}$ — известное уточняемое значение; $\Delta J_4 = J_4 - J_4^{(0)}$ и т. д.; $\dot{\bar{Э}}'_j\, o$ — «наблюденное» значение, найденное уже описанным способом; $\dot{\bar{Э}}'_j\, c$ — значение, вычисленное по (VI.8) с приближенными величинами $J_u^{(0)}$. При этом в (VI.8) нужно ввести дополнительную неизвестную, характеризующую собой неполный учет атмосферного торможения. Во втором приближении в (VI.8) нужно исправить свободные члены $\dot{\bar{Э}}'$ за влияние нечетных параметров, в (VI.10) — за влияние четных параметров и решить уравнения еще раз.

Такова общая схема определения зональных параметров геопотенциала. Эта схема употреблялась различными авторами с теми или иными видоизменениями в деталях. Наиболее полные определения были выполнены Y. Kozai [54].

Нужно отметить, что уравнения вида (VI.11) требуют введения дополнительных неизвестных, что обусловлено постепенно повышающейся точностью наблюдений ИСЗ. Этими неизвестными должны являться:

1) амплитуды долгопериодических возмущений с периодами в половину периода обращения перицентра, одну треть и т. д.; 2) амплитуды резонансных возмущений от долготных гармоник геопотенциала; 3) дополнительные неизвестные, характеризующие собой недостаточный учет атмосферного торможения.

Кроме того, целесообразно использовать все комбинации систем элементов для одного и того же спутника $Э_{j+1} - Э_j$, однако объем вычислительной работы в этом случае возрастет.

§ 3. Определение коэффициентов долготных гармоник геопотенциала по возмущениям элементов орбиты ИСЗ

Коэффициенты долготных гармоник геопотенциала следует определять и уточнять после определения коэффициентов зональных гармоник. Это объясняется тем, что в отличие от зональных гармоник долготные гармоники вековых возмущений в элементах орбиты ИСЗ не вызывают. Одновременно с определением коэффициентов долготных гармоник нужно искать поправки к координатам пунктов наблюдений и поправки к параметрам атмосферы. Поэтому задача определения и уточнения долготных членов геопотенциала по возмущениям элементов орбиты ИСЗ является одним из аспектов орбитального метода космической геодезии.

Предположим, что с ряда пунктов на земной поверхности в течение некоторого периода времени производились наблюдения N спутников ($N=1, 2, 3...$) и для каждого из спутников определены системы элементов орбиты $Э_{SN}$ на эпохи соответственно UT_{SN} ($S=0, 1, 2...$). Будем считать, что в разностях $Э_{SN}-Э_{ON}$, соответствующих интервалам времени $t_{SN}=UT_{SN}-UT_{ON}$ ($S=1, 2, 3,...$), учтены все возмущения, кроме возмущений от долготной части геопотенциала. Тогда каждая разность $\delta S_{SN}=Э_{SN}-$ $-Э_{ON}$ есть не что иное как величина возмущений за интервал t_{SN} от долготной части геопотенциала.

Как мы уже знаем, эти возмущения можно представить разложениями вида (II.142), но без вековых членов. С учетом результатов § 16 и 17 второй главы запишем эти разложения в форме:

$$\delta Э_{SN} = \Big[\sum_{n,\, k,\, j,\, \ldots} \frac{1}{\{n,\, k,\, j\}} \{C_{nk} A_{nk}(a,\, e,\, i) \sin [\{n,\, k,\, j\} M +$$

$$+ f_{nk}(\Omega,\, \pi,\, \varepsilon)] + S_{nk} B_{nk}(a,\, e,\, i) \cos [\{n,\, k,\, j\} M + f_{nk}(\Omega,\, \pi,\, \varepsilon)]\}\Big]_{SN}.$$

$$S,\, N = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots, \qquad \textbf{(VI.12)}$$

где C_{nk}, S_{nk} — коэффициенты долготных гармоник; A_{nk}, B_{nk} — известные функции позиционных элементов орбиты a, e, i, f_{nk} — функции угловых элементов орбиты Ω, π, ε; $\{n,\, k,\ \}$ — коэффициент при средней аномалии M, зависящий от индексов, входящих в разложение (II.156), от среднего движения ИСЗ $\tilde{n}$ и от угловой скорости вращения Земли ν (явную форму этого коэффициента укажем ниже).

Если использовать явные выражения разложений типа (VI.12), то для каждого из спутников, зная его начальные элементы орбиты, можно вычислить функции A_{nk}, B_{nk}, f_{nk}, а также для каждого из интервалов времени найти соответствующее значение средней аномалии. Таким образом, коэффициенты C_{nk}, S_{nk} можно рассматривать как неизвестные в линейных алгебраических уравнениях (VI.12). Как уже указывалось, в (VI.12) нужно добавить члены, зависящие от неизвестных поправок в начальные элементы орбиты каждого спутника, поправок в координаты станций наблюдений и поправок в параметры атмосферы.

Поэтому уравнения погрешностей должны иметь следующую форму:

$$\delta Э_{SN} = \Big[\sum_{n,\,k,\,j,\,\ldots} \frac{1}{\{n,\,k,\,j\}} \{C_{nk}A_{nk} \sin [\{n,\,k,\,j\} M + f_{nk}] +$$

$$+ S_{nk}B_{nk} \cos [\{n,\,k,\,j\} M + f_{nk}]\}\Big]_{SN} + \delta Э_{ON} + \sum_{L} (A_{XSL}\, \delta X_L +$$

$$+ A_{YSL}\, \delta Y_L + A_{ZSL}\, \delta Z_L) + \alpha t_{SN} + \beta t_{SN}^2 + \gamma t_{SN}^3 + \ \ldots \qquad \text{(VI.13)}$$

Здесь неизвестными величинами являются: C_{nk}, S_{nk} — коэффициенты долготных гармоник геопотенциала; $\delta Э_{ON}$ — поправки в начальные элементы орбиты каждого из N спутников; δX_L, δY_L, δZ_L — поправки в гринвичские координаты каждой из L ($L = 1, 2, 3, 4, \ldots$) наблюдательных станций, α, β, γ...* — параметры, характеризующие неучтенное влияние атмосферного торможения. Коэффициенты A_X, A_Y, A_Z для каждой из L станций и каждого момента времени могут быть представлены так:

$$\begin{aligned} A_X &= \frac{\partial Э}{\partial X} = \frac{\partial Э}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial Э}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}; \\ A_Y &= \frac{\partial Э}{\partial Y} = \frac{\partial Э}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial Э}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y}; \\ A_Z &= \frac{\partial Э}{\partial Z} = \frac{\partial Э}{\partial z}, \end{aligned} \qquad \text{(VI.14)}$$

где x, y, z — геоцентрические (инерциальные) координаты ИСЗ, причем формулы для вычисления производных $\frac{\partial Э}{\partial x}$, $\frac{\partial Э}{\partial y}$, $\frac{\partial Э}{\partial z}$ могут быть получены дифференцированием выражений (II.55). Производные от геоцентрических координат ИСЗ по гринвичским координатам станций могут быть представлены так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X}(x' + \xi), & \frac{\partial x}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial Y}(x' + \xi) \\ \frac{\partial y}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X}(y' + \eta), & \frac{\partial y}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial Y}(y' + \eta) \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(VI.15)}$$

где ξ, η — геоцентрические координаты станций в инерциальной системе, а x', y', z' — топоцентрические координаты ИСЗ, от ко-

* Установление связи между α, β, γ, ... и параметрами верхней атмосферы в нашу задачу не входит.

ординат станций не зависящие. Поэтому, используя формулы (I.24) и (I.25), получим

$$\frac{\partial x}{\partial X}=\frac{\partial \xi}{\partial X}=\frac{\partial y}{\partial Y}=\frac{\partial \eta}{\partial Y}=\cos\overline{S};\qquad \frac{\partial x}{\partial Y}=\frac{\partial \xi}{\partial Y}=-\sin\overline{S},\quad \text{(VI.16)}$$

где гринвичское звездное время $\overline{S}$ для каждого момента вычисляется по формуле (I.26).

Если при подготовке данных наблюдений учитывались также возмущения от ряда долготных гармоник с приближенно известными коэффициентами, то в уравнениях (VI.13) соответствующие коэффициенты C_{nk}, S_{nk} следует заменить на искомые к ним поправки δC_{nk}, δS_{nk}. Правые части уравнений (VI.13) представляют собой бесконечные ряды. Поэтому, исходя из заданного набора результатов определений элементов орбиты и известной точности наблюдений, в этих рядах следует ограничиться таким числом членов, чтобы все уравнения (VI.13) представляли собой избыточную систему. Решив эту систему по способу наименьших квадратов, находят вероятнейшие значения неизвестных.

В решениях, выполненных по описанному принципу, до настоящего времени обычно оказывалось, что ряд искомых долготных параметров геопотенциала плохо отделяется от поправок к координатам пунктов. При различном наборе измерений и расположений наблюдательных станций плохо отделяться от координат могут разные параметры, а именно те, коэффициенты при которых в уравнениях (VI.13) либо близки к коэффициентам при поправках в координаты станций, либо им пропорциональны. Это происходит потому, что коэффициенты при C_{nk}, S_{nk} и δX, δY, δZ пропорциональны некоторым периодическим функциям времени, а для различных периодических функций времени всегда найдутся такие моменты, когда значения функций близки. Из-за сложности аналитических выражений указанных коэффициентов и большого объема исходной информации определить заранее, какие именно параметры геопотенциала в данном случае будут плохо определяться, чаще всего довольно трудно. Поэтому обычно ограничиваются констатацией результатов оценки точности полученного решения. Затем производится анализ различных решений.

§ 4. Учет резонансных возмущений

Формальные решения, полученные на основе принципов, описанных в двух предыдущих параграфах, можно рассматривать как первое приближение к решению задачи изучения внешнего геопотенциала. Под вторым приближением будем понимать те же решения, но с учетом резонансных возмущений от долготных гармоник геопотенциала, которые могут оказаться весьма существенными.

Сначала уточним условия резонанса, которые в упрощенной форме рассматривались в § 17 второй главы. Используем для этого общее разложение пертурбационной функции (II.156) и формулы для вековых возмущений первого порядка от второй зональной гармоники (II.165). Правые части этих формул обозначим соответственно через $\dot{\bar{\Omega}}t$, $\dot{\bar{\omega}}t$, $\dot{\bar{M}}_0 t$, где t — время. Положим

$$\bar{\Omega} = \Omega_0 + \dot{\bar{\Omega}}t, \quad \bar{\omega} = \omega_0 + \dot{\bar{\omega}}t,$$

$$\bar{M} = M_{\text{невозм}} + \dot{\bar{M}}_0 t - \frac{3}{2}\tilde{n}\frac{\delta a}{a}t, \tag{VI.17}$$

где в соответствии с формулой (II.127) и § 16 гл. II δa — короткопериодические возмущения в большой полуоси орбиты ИСЗ от второй зональной гармоники; $\tilde{n}$ — среднее движение спутника. Учитывая, что $\pi = \Omega + \omega$ и $\varepsilon = \pi + M_0$, подставим возмущенные значения узла, перицентра и средней аномалии (VI.17) в разложение (II.156) с учетом выражений вида (II.158). Выразив для удобства среднюю аномалию через время, условие резонанса получим, приравняв нулю коэффициент при t в (II.156)

$$j - k\frac{\nu}{\tilde{n}} = (n - 2k + 2m - 2s - 2l)\frac{\dot{\bar{\omega}}}{\tilde{n}} -$$

$$-k\frac{\dot{\bar{\Omega}}}{\tilde{n}} - j\frac{\dot{\bar{M}}_0}{n} + \frac{3}{2}\frac{\delta a}{a}\left(j - k\frac{\nu}{\tilde{n}}\right). \tag{VI.18}$$

В соответствии с этим малый делитель $\{n, k, j\}$ в (VI.12) и (VI.13) равен

$$\{n, k, j\} = \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\delta a}{a}\right)\left(j - k\frac{\nu}{\tilde{n}}\right) - (n - 2k +$$

$$+ 2m - 2s - 2l)\frac{\dot{\bar{\omega}}}{\tilde{n}} + k\frac{\dot{\bar{\Omega}}}{\tilde{n}} + j\frac{\dot{\bar{M}}_0}{\tilde{n}}. \tag{VI.19}$$

Для спутников с высотами над поверхностью Земли 200—300 км и выше отношения $\dot{\bar{\omega}}/n$, $\dot{\bar{\Omega}}/\tilde{n}$, $\dot{\bar{M}}_0/n$ и $\delta a/a$ составляют величины порядка $\lesssim 10^{-3}$. Поэтому правая часть (VI.18) мало отличается от нуля и приближенно можно положить, как § 17 гл. II,

$$j\bar{n} - k\nu \approx 0. \tag{VI.20}$$

Отметим, что при различном выборе переменных, уравнений движения и методов их интегрирования, а это в небесной механике всегда можно сделать, условия резонанса могут быть получены в различной форме, не обязательно совпадающей с (VI.19).

Задавая последовательно номера k долготных гармоник и зная значения средних движений $\bar{n}$ наблюдавшихся спутников, при помощи (VI.20), где ν — угловая скорость вращения Земли, находим значения индексов j резонансных членов, входящих в разложение пертурбационной функции (II.56). Например, пусть дан спутник с периодом обращения 2 ч, так что $\nu/\bar{n} \sim \sim 0{,}08$. В этом случае получаем: $k=12$, $j=1$; $k=24$, $j=2$; $k=36$, $j=3$; .... При современном уровне теории движения ИСЗ и техники наблюдений спутников вряд ли целесообразно выделять резонансные возмущения от долготных гармоник со значениями индексов $k > 18 \div 20$; здесь еще необходимы длительные и весьма тщательные исследования. Поэтому в указанном примере целесообразно принимать во внимания лишь значения $k=12$, $j=1$. Аналогичным образом выделяем резонансные возмущения в орбитах всех наблюдавшихся спутников.

Затем по формулам типа (VI.12) с учетом выражений для малых делителей (VI.19) вычисляем значения резонансных возмущений $\delta Э_{SN\text{рез}}$ и свободные члены в (VI.13) исправляем за резонансную часть правых частей. Теперь в уравнениях погрешностей (VI.13) свободные члены $\delta Э_{SN}$ нужно заменить на величины $l_{SN} = \delta Э_{SN} - \delta Э_{SN\text{рез}}$, а коэффициенты резонансных гармоник — на искомые к ним поправки. После этого систему (VI.13) следует решить заново.

На практике разделять задачу на два этапа в настоящее время нет необходимости. Целесообразно резонансную часть возмущений учитывать в уравнениях (VI.13) сразу.

Описанный вариант учета резонансных возмущений условно назовем основным. Возможны еще два варианта, заключающиеся в предварительном определении коэффициентов лишь резонансных гармоник. В одном из вариантов при определении зональных коэффициентов в уравнении вида (VI.11) можно включить в качестве дополнительных неизвестных амплитуды резонансных возмущений или, наоборот, если искомые коэффициенты с некоторой точностью уже известны — учесть резонансные возмущения при вычислении свободных членов уравнений (VI.11). В другом варианте в уравнениях вида (VI.13) отбрасываем все нерезонансные члены и из решения упрощенной таким образом системы находим значения резонансных коэффициентов в первом приближении. После выполнения этих вариантов необходимо получить окончательное решение в основном варианте. Возможны различные комбинации перечисленных вариантов. Какой из вариантов «лучше» или «хуже», в настоящее время указать нельзя, так как соответствующего критерия не существует и не может пока существовать. Это объясняется тем, что задача о влиянии резонансных возмущений на движение ИСЗ с достаточной степенью строгости пока не решена (см.

гл. II § 17). Поэтому на практике, в зависимости от заданного состава измерений орбит спутников, расположения наблюдательных станций и т. п. наиболее целесообразную последовательность вычислений приходится выбирать всякий раз независимо.

§ 5. Дальнейшее уточнение параметров геопотенциала и общая схема реализации динамического метода космической геодезии

Сущность динамического метода сводится к получению и решению уравнений вида (6.2). Основной задачей является получение уравнений. Эта задача делится на две части: вычисление свободных членов и вычисление коэффициентов при неизвестных.

В качестве исходных данных примем следующие величины.

1. Координаты X, Y, Z пунктов на поверхности Земли, с которых производились наблюдения спутника (или спутников), в гринвичской системе координат, отнесенной к стандартной эпохе.

2. Наблюденные значения величин q_0 на моменты времени в системе $UT1$, характеризующие положение спутника в инерциальной системе координат. Это могут быть топоцентрические прямые восхождения α' и склонения δ', топоцентрические расстояния r', либо то и другое вместе. Будем считать, что наблюденные величины q_0 также отнесены к некоторой эпохе t_0, причем измеренные топоцентрические расстояния r' преобразованиям не подлежат, так как они не зависят от выбора системы отсчета.

3. В целях общности будем считать, что начальные условия движения наблюдаемого спутника или его элементы орбиты также неизвестны и подлежат определению из имеющегося состава измерений. Рассмотрим последовательность операций при реализации орбитального метода.

Вычисление свободных членов. Первый этап. Определение предварительной орбиты. Из имеющегося состава измерений выбираем три момента $UT1_1$, $UT1_2$, $UT1_3$, которым соответствуют наблюденные значения α_1', δ_1'; α_2', δ_2'; α_3', δ_3', и в соответствии с § 10 гл. II вычислим элементы предварительной орбиты $Э_j$, $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$. Если имеется ряд наблюдений; для которых измерены все три координаты, то достаточно выбрать два момента. Если же измерялись только расстояния, то необходимо выбрать минимум шесть моментов. Для того чтобы получить два положения спутника в пространстве, нужно реализовать две линейные пространственные засечки спутника с трех пунктов. Организация подобных наблюдений гораздо сложнее организации, например, синхронных фотографических наблюдений. Кроме того, часто приближенная предварительная орбита бывает известна.

Второй этап. Приближенное уточнение предварительной орбиты. Этот этап необходимо выполнять, если некоторая предварительная орбита задана, а первый этап не выполнялся. Дело в том, что на практике иногда приходится в качестве заданной орбиты использовать орбиту, определенную довольно грубо.

В этом случае необходимо поступать в соответствии с методикой, описанной в § 11 гл. II. Если набор измерений велик, то для приближенного уточнения можно использовать лишь часть измерений и учитывать лишь вековые возмущения первого порядка от второй зональной гармоники геопотенциала. Полученные в результате такого уточнения элементы принимаем за исходные элементы предварительной орбиты.

Третий этап. Вычисление возмущенных элементов орбиты. Для каждого из интервалов времени между эпохой элементов предварительной орбиты и моментами наблюдений по формулам теории возмущений (гл. II) с использованием элементов предварительной орбиты вычисляем величины возмущений от каждого из возмущающих факторов. Вычисляются: 1) возмущения первого и второго порядков от второй зональной гармоники; 2) возмущения первого порядка от остальных известных гармоник геопотенциала как зональных, так и долготных; 3) возмущения первого порядка от Луны и Солнца; 4) на основе некоторой заданной модели атмосферы — возмущения от атмосферного торможения; 5) возмущения от светового давления. Суммируя найденные значения возмущений в каждом из элементов орбиты, складываем их с соответствующими значениями элементов предварительной орбиты и получаем для каждого из моментов наблюдений свою систему возмущенных элементов орбиты. Нужно заметить, что в связи с постепенно повышающейся точностью наблюдений назревает необходимость учета наиболее крупных членов возмущений третьего порядка от второй зональной гармоники и второго порядка от остальных гармоник геопотенциала, а также — от Луны и Солнца.

Четвертый этап. Подставляем в формулы невозмущенного движения (§ 8 гл. II) для каждого из моментов наблюдений свою систему возмущенных элементов и находим теоретические значения измеренных величин q_c (формулы II.81). При этом возмущенные значения средней аномалии вычисляются в соответствии с формулой (II.127). Вычисляя разности $q_0—q_c$, находим свободные члены уравнений (VI.2). Таким образом, в связи с необходимостью вычисления возмущенных значений координат спутника перечисленные операции оказываются довольно громоздкими. Иногда их можно несколько упростить, если все наблюдения заключены в интервале 1—3 суток. Тогда для получения возмущенных значений координат ИСЗ можно применить численное интегрирование уравнений возмущенного движения спутника (II.113).

На больших интервалах времени это делать нецелесообразно во избежание систематического накопления погрешностей на каждом шаге интегрирования.

Вычисление коэффициентов при неизвестных в уравнениях (VI.2).

1. Коэффициенты при неизвестных поправках в прямоугольные гринвичские координаты пунктов вычисляются как производные сложных функций:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial X} &= \frac{\partial q}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial q}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial X} \\ \frac{\partial q}{\partial Y} &= \frac{\partial q}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial q}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial Y} \\ \frac{\partial q}{\partial Z} &= \frac{\partial q}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial Z} \end{aligned}\right\}. \qquad (VI.21)$$

Здесь q — любая из топоцентрических координат ИСЗ α', δ' или r'; первые сомножители в слагаемых находятся дифференцированием формул (II.81); вторые сомножители в силу формул (II.81) равны единице; третьи сомножители определяются формулами (VI.16), кроме того, $\frac{\partial \zeta}{\partial Z} = 1$.

2. Коэффициенты при неизвестных поправках к принятым элементам невозмущенной предварительной орбиты находят аналогичным образом:

$$\frac{\partial q}{\partial Э_0} = \frac{\partial q}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Э}\frac{\partial Э}{\partial Э_0} + \frac{\partial q}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Э}\frac{\partial Э}{\partial Э_0} + \frac{\partial q}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial Э}\frac{\partial Э}{\partial Э_0}, \qquad (VI.22)$$

где $Э$ — возмущенное значение любого из элементов орбиты, $Э_0$ — его невозмущенное значение. Как и в предыдущем случае, первые сомножители в слагаемых можно найти, дифференцируя формулы (II.81), вторые сомножители равны единице. Третьи сомножители находятся дифференцированием формул невозмущенного движения (II.55). Четвертые сомножители, представляющие собой производные от текущего возмущенного значения данного элемента по его начальному, невозмущенному значению, как уже упоминалось в § 11 гл. II, принято называть изохронными производными *. Выражения для этих производных могут быть получены, если продифференцировать по невозмущенным элементам орбиты формулы для возмущений в этих же элементах, содержащие вековые и долгопериодические чле-

* Термин неудачный, так как в переводе с древнегреческого языка означает «равновременные» производные, что не отвечает существу дела.

ны от второй зональной гармоники геопотенциала. При увеличении точности наблюдений (с применением, например, лазерной техники) нужно учитывать также вековые и долгопериодические члены, вызываемые гармониками геопотенциала, имеющими порядок квадрата второй зональной гармоники.

3. Коэффициенты при неизвестных поправках в параметры геопотенциала вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial q}{\partial C_{nk}} = \frac{\partial q}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial C_{nk}} + \frac{\partial q}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial C_{nk}} + \frac{\partial q}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial C_{nk}}; \quad \text{(VI.23)}$$

аналогично — для производной $\frac{\partial q}{\partial S_{nk}}$, причем $2 \leqslant n \leqslant N$, $0 \leqslant k \leqslant n$, где N — некоторое заданное натуральное число; $C_{n0} = -J_n$. Первые два сомножителя в слагаемых имеют тот же смысл, что и раньше, третьи же слагаемые опять можно рассматривать, как производные сложной функции; например,

$$\frac{\partial x}{\partial C_{nk}} = \sum_{s=1}^{6} \frac{\partial x}{\partial Э_s} \frac{\partial Э_s}{\partial C_{nk}}, \quad \text{(VI.24)}$$

так что окончательно

$$\frac{\partial q}{\partial C_{nk}} = \sum_{s=1}^{6} A_s \frac{\partial Э_s}{\partial C_{nk}}, \qquad \frac{\partial q}{\partial S_{nk}} = \sum_{s=1}^{6} A_s \frac{\partial Э_s}{\partial S_{nk}}, \quad \text{(VI.25)}$$

где

$$A_s = \left(\frac{\partial q}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial Э_s} + \frac{\partial q}{\partial y'} \frac{\partial y}{\partial Э_s} + \frac{\partial q}{\partial z'} \frac{\partial z}{\partial Э_s}\right), \quad \text{(VI.26)}$$

кроме того, $\frac{\partial Э_s}{\partial C_{nk}}$ и $\frac{\partial Э_s}{\partial S_{nk}}$ — известные функции, являющиеся коэффициентами при C_{nk} и S_{nk} в формулах для возмущений первого порядка в элементе $Э_s$ от гармоник геопотенциала, пропорциональных соответственно C_{nk} и S_{nk}.

4. Коэффициенты при неизвестных поправках в принятую математическую модель атмосферы существенным образом зависят от самой модели. Изучение верхней атмосферы по движению ИСЗ является обычно самостоятельной задачей. Целесообразно при реализации орбитального динамического метода «атмосферную» часть уравнений (VI.2) представить в виде степенного (относительно времени) многочлена с неизвестными коэффициентами, аналогичного многочлену, входящему в (VI.13): $\alpha t + \beta t^2 + \ldots$

Окончательно уравнения (VI.2) для случая наблюдений одного спутника с одного пункта запишем так:

$$q_0 - q_c = \frac{\partial q}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial q}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial q}{\partial Z} \Delta Z + \sum_{m=1}^{6} \frac{\partial q}{\partial Э_{0_m}} \Delta Э_{0_m} +$$

$$+\sum_{n=2}^{N}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\partial q}{\partial C_{nk}}\Delta C_{nk}+\frac{\partial q}{\partial S_{nk}}\Delta S_{nk}\right)+\alpha t+\beta t^2+\ldots. \quad \text{(VI.27)}$$

В эти уравнения следовало бы добавить член, содержащий искомую поправку $\Delta\mu$ в гравитационный параметр Земли: $\frac{\partial q}{\partial \mu}\Delta\mu$ (см. § 6 гл. VI).

Наконец, имея избыточное число уравнений (VI.27), полученных при помощи наблюдений различных спутников с разных пунктов, можно составить нормальные уравнения, решив которые — найти вероятнейшие значения неизвестных.

В зависимости от объема и распределения исходной информации практическая реализация динамического метода может приводить к различным частным случаям. Например, как отмечалось в гл. V, при наблюдениях спутника на коротком интервале времени, соответствующем одному или, в крайнем случае, нескольким оборотам, вводят в качестве неизвестных поправки в координаты пунктов и поправки в начальные условия движения. Кроме того, если спутник низкий — поправки в модель атмосферы. Этот частный случай носит название «метода коротких дуг». Параметры геопотенциала в настоящее время по коротким дугам уточнять нецелесообразно.

Еще раз подчеркнем, что динамический метод, в отличие от геометрических методов, позволяет получать координаты пунктов в системе, связанной с центром масс Земли.

§ 6. Уточнение некоторых фундаментальных постоянных астрономии и геодезии из наблюдений спутников

В настоящее время фундаментальными геодезическими постоянными принято считать следующие величины: экваториальный радиус земного эллипсоида a_e *, гравитационный параметр Земли $\mu = fM$, коэффициент второй зональной гармоники геопотенциала J_2, угловая скорость вращения Земли ω (обозначена через ν) и значение силы тяжести на экваторе так называемой нормальной Земли γ_e, поверхность которой совпадает с уровенной поверхностью потенциала силы тяжести. Величины a_e, μ, J_2 одновременно являются основными фундаментальными астрономическими постоянными. Сжатие земного эллипсоида α относится к фундаментальным геодезическим постоянным и одновременно — к производным астрономическим постоянным, так как согласно формуле (II.163) достаточно знать a_e, μ, J_2 и ω, чтобы найти α.

* Средний экваториальный радиус Земли r_0, строго говоря, не совпадает с величиной a_e, но в теории возмущений можно считать $r_0 = a_e$.

Таким образом, основными постоянными будем считать a_e, μ, J_2 и ω; вспомогательной постоянной — γ_e. Международный астрономический союз в 1964 г. утвердил следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} a_e &= 6\,378\,160 \text{ м} \\ \mu &= 398\,603 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{сек}^2 \\ J_2 &= 1{,}0827 \cdot 10^{-3} \\ \omega &= 7{,}2921151467 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{сек}} \end{aligned}\right\}. \tag{VI.28}$$

Рассмотрим сущность методов определения перечисленных постоянных, кроме угловой скорости вращения Земли, спутниковыми методами. Угловая скорость вращения Земли с весьма высокой точностью определяется чисто астрономическими методами.

Гравитационный параметр Земли. Гравитационный параметр Земли* в силу третьего закона Кеплера определяет масштаб построений в космической геодезии. Заменим в третьем законе Кеплера период обращения при помощи формулы (II.31) и будем считать большую полуось и среднее движение возмущенными. Будем также полагать, что все негравитационные возмущения исключены. Тогда гравитационный параметр должен удовлетворять соотношению

$$\mu = 2\pi (a + \delta a)^3 (n + \delta n)^2 - \mu', \tag{VI.29}$$

где a и n — начальные значения большой полуоси и среднего движения, δa, δn — их возмущения. В этих возмущениях достаточно учитывать все члены порядка J_2 и наиболее крупные члены порядка J_2^2. Величина μ' — произведение постоянной тяготения на массу атмосферы.

Очевидно, что если независимым путем определить из наблюдений большую полуось и среднее движение, то тем самым можно найти гравитационный параметр. При наблюдениях спутников фотографическими методами одна из величин обычно зависимая.

Поэтому для уточнения гравитационного параметра необходимо использовать линейные измерения, например, лазерными методами. В этом случае в общие уравнения орбитального метода (VI.27), если q — измеренные расстояния, как указано в

---

* Другое название, часто используемое за рубежом,— геоцентрическая гравитационная постоянная.

§ 5, необходимо включить член $\frac{\partial q}{\partial \mu}\Delta\mu$, зависящий от поправки в гравитационный параметр. В этом случае $q = r'$ и

$$\frac{\partial r'}{\partial \mu} = \frac{\partial r'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \mu}, \tag{VI.30}$$

причем

$$\frac{\partial r'}{\partial a} = \frac{\partial r'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial r'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial r'}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}. \tag{VI.31}$$

Производная $\frac{\partial a}{\partial \mu}$, находится из третьего закона Кеплера, первые сомножители в слагаемых формулы (VI.31) могут быть найдены, как указано в § 5, вторые сомножители — из дифференцирования формул (II.55) с учетом (II.25).

Однако наиболее целесообразный путь уточнения гравитационного параметра — это использование результатов доплеровских наблюдений за космическими аппаратами, запускаемыми к Луне и планетам.

Преимущества таких наблюдений заключаются в том, что на больших расстояниях от Земли влияние малой ошибки в принятом значении земного гравитационного параметра на вычисленные ускорения оказывается существенным. Тогда разница между наблюденными и вычисленными ускорениями также оказывается существенно больше такой же величины, получаемой из наблюдений ИСЗ. Тем самым чувствительность метода повышается и гравитационный параметр определяется наиболее точно. Принятое в настоящее время значение μ основано главным образом на наблюдениях за космическими аппаратами.

Вторая зональная гармоника J_2 определяется и уточняется методами, описанными в § 2 этой главы.

Экваториальный радиус земного эллипсоида a_e. В § 9 гл. V был рассмотрен один из возможных способов определения a_e и сжатия эллипсоида α. В § 10 той же главы шла речь об определении координат центра масс Земли и взаимной ориентировке топоцентрической и геоцентрической систем координат. Кратко рассмотрим теперь совместный способ определения этих параметров. Пусть динамическим методом найдены поправки ΔX, ΔY, ΔZ к гринвичским координатам целого ряда пунктов земной поверхности. Целесообразно при этом использовать наблюдения спутников на коротких дугах, чтобы большинство поправок в параметры геопотенциала из уравнений (VI. 27) можно было исключить. Кроме того, необходимо, чтобы исходные координаты всех пунктов были даны в системе одного и того же эллипсоида. Тогда найденные поправки в координаты пунктов ΔX, ΔY, ΔZ в гринвичской системе координат есть функции координат центра масс Земли относительно центра принятого эллипсоида, поправки в большую полуось эллипсоида, поправки в его сжатие и направляющих косинусов осей гринвичской системы координат, связанной с общим земным эллипсоидом, относительно осей гринвичской системы, связанной с принятым эллипсоидом. В большинстве современных исследований чаще всего полагается, что оси этих систем параллельны (см., например, [54]). Это объясняется тем, что ориентировка любого эллипсоида в высшей геодезии определяется под условием параллельности его малой оси средней оси вращения Земли на стандартную эпоху. Таким образом, точность ориентировки эллипсоида в первую очередь зависит от точности определения направления оси вращения Земли и, тем самым, — от точности применяемых звездных каталогов. То же самое будет иметь место и при использовании спутниковых методов, ибо исходная информация — наблюденные координаты ИСЗ — зависит от точности применяемого звездного каталога. С другой стороны, точность определения направления оси вращения Земли в настоящее время достаточно высока и «перекосом» осей систем координат при современной точности наблюдений ИСЗ можно пренебречь.

С учетом этих замечаний для одного пункта можно написать три уравнения

$$\left.\begin{aligned} \Delta X &= \delta X + \frac{\partial X}{\partial a_e}\Delta a_e + \frac{\partial X}{\partial \alpha}\Delta\alpha \\ \Delta Y &= \delta Y + \frac{\partial Y}{\partial a_e}\Delta a_e + \frac{\partial Y}{\partial \alpha}\Delta\alpha \\ \Delta Z &= \delta Z + \frac{\partial Z}{\partial a_e}\Delta a_e + \frac{\partial Z}{\partial \alpha}\Delta\alpha \end{aligned}\right\}. \tag{VI.32}$$

Здесь пять неизвестных: δX, δY, δZ — координаты центра масс Земли, Δa_e — поправка в большую полуось эллипсоида *, $\Delta\alpha$ — поправка в его сжатие. Два пункта дают уже шесть уравнений с пятью неизвестными. Так что для получения достаточного числа избыточных уравнений необходимо определение поправок гринвичских координат орбитальным методом более чем двух пунктов. Производные, входящие в (VI.32), могут быть найдены дифференцированием по a_e и α формул (I.8). После того как уравнения вида (VI.32) для всех пунктов решены по способу наименьших квадратов, геодезические координаты каждого из пунктов могут быть исправлены при помощи дифференциальных формул II рода (I.14). Окончательные значения большой полуоси и сжатия найдутся как

$$a_e = a_{e_0} + \Delta a_e; \quad \alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha; \tag{VI.33}$$

* Распространен также метод определения a_e из сравнения высот квазигеоида, полученных земными и спутниковыми методами, и нормальных высот над некоторым эллипсоидом. Это уже смешанный метод, а не чисто «космический», и из-за ограниченного объема книги его описание нельзя здесь поместить.

где a_{e_0}, α_0 — принятые приближенные значения. Сжатие α, полученное в данном случае, должно быть согласовано со сжатием, которое можно вычислить по формуле (II.163). Если нужно найти поправки в ориентировку гринвичской системы, то в каждое из уравнений (VI.32) следует добавить, соответственно, члены

$$\alpha_x \Delta X + \beta_x \Delta Y + \gamma_x \Delta Z,$$

$$\alpha_y \Delta X + \beta_y \Delta Y + \gamma_y \Delta Z, \quad \alpha_z \Delta X + \beta_z \Delta Y + \gamma_z \Delta Z,$$

где $\alpha_{x,y,z}$, $\beta_{x,y,z}$, $\gamma_{x,y,z}$ — искомые направляющие косинусы. Выражая их через эйлеровы углы (см. § 3 гл. I), получим три дополнительные неизвестные величины: углы прецессии, нутации и чистого вращения. Тогда каждый пункт будет давать три уравнения с восемью неизвестными и для получения избыточной информации число пунктов должно быть более трех.

Заметим, что для уменьшения числа неизвестных в уравнениях орбитального метода (VI.27) поправки в координаты пунктов можно заменить при помощи уравнений вида (VI.32). Кроме того, поправку $\Delta\alpha$ в уравнения (VI.32) пока не вводят, а определяют сжатие на основе коэффициента J_2, ибо указанная выше проблема согласования еще не решена.

Сила тяжести на экваторе нормальной Земли γ_e. После того как спутниковыми методами уточнены значения μ, a_e и α, для определения величины γ_e может быть использовано известное из теории фигуры Земли соотношение

$$\mu = a_e \gamma_e \left(1 - \alpha + \frac{3}{2} \frac{\omega^2 a_e}{\gamma_e} - \frac{15}{14} \alpha \frac{\omega^2 a_e}{\gamma_e} + m' + \ . \ . \ . \right), \quad \text{(VI.34)}$$

где m' — масса атмосферы в единицах массы Земли ($m' \sim 10^{-6}$), ω — угловая скорость вращения Земли. Решение уравнения вида (VI.34) производится методом последовательных приближений; в первом приближении за γ_e, стоящее в знаменателях слагаемых в круглых скобках, можно принять его исходное приближенное значение. Продифференцировав же (VI.34) по всем переменным, кроме ω и m', можно найти поправку $\Delta\gamma_e$ в принятое значение γ_e в зависимости от известных поправок $\Delta\mu$, Δa_e, $\Delta\alpha$.

В заключение отметим, что окончательное принятие значений фундаментальных геодезических постоянных международными научными организациями производится на основе тщательного анализа определений постоянных различными методами, причем спутниковым методам в настоящее время придается наибольшее значение.

Глава VII

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ, И ПЕРСПЕКТИВЫ ЕЕ РАЗВИТИЯ

§ 1. Результаты решения геометрических задач космической геодезии

Первые практические результаты в решении геометрических задач космической геодезии были получены на основе синхронных и квазисинхронных наблюдений камерами Бейкера-Нанна со станций, расположенных в США, Перу и на острове Кюрасао. Из наблюдений с мая по ноябрь 1962 г. были определены направления линий, соединяющих соседние станции, с ошибкой порядка 1″.

Примерно в это же время во Франции из наблюдений спутника «Echo 1» была установлена геодезическая связь между четырьмя пунктами с расстояниями между ними в несколько сотен километров. Полученные результаты характеризовались ошибкой 50 м на расстоянии в 2000 км.

В результате наблюдений с 1963 по 1964 г. спутника «Echo-1» была создана геодезическая сеть на востоке США, на Бермудских островах и острове Антигуа.

На начальном этапе точность космических геодезических построений на территории США характеризовалась следующими данными. Положение пункта из фотографических наблюдений камерой PC-1000 получалось с ошибкой 5—7 м. Использование системы Secor при сторонах 800 км обеспечивало точность 6—10 м, а при сторонах 1600 км — 8—24 м.

Работы по созданию спутниковых геометрических построений проводились с 1961 г. в СССР и других социалистических странах. На основе наблюдений ИСЗ «Echo 1» и «Echo 2» в 1963 г. со станций Звенигород, Николаев, Рига, Ужгород, Бухарест, Познань, Прага была построена экспериментальная сеть космической триангуляции.

США с участием наблюдательных групп из ФРГ, Англии, Австралии и других стран осуществили проект PAGEOS, о чем упоминалось в гл. V. Мировая геодезическая сеть из 46 станций, построенная в соответствии с проектом PAGEOS, изображена на рис. 58.

Спутниковым геометрическим методом была осуществлена связь между станциями, образующими сеть Смитсонианской астрофизической обсерватории (SAO), и пунктами в Европе:

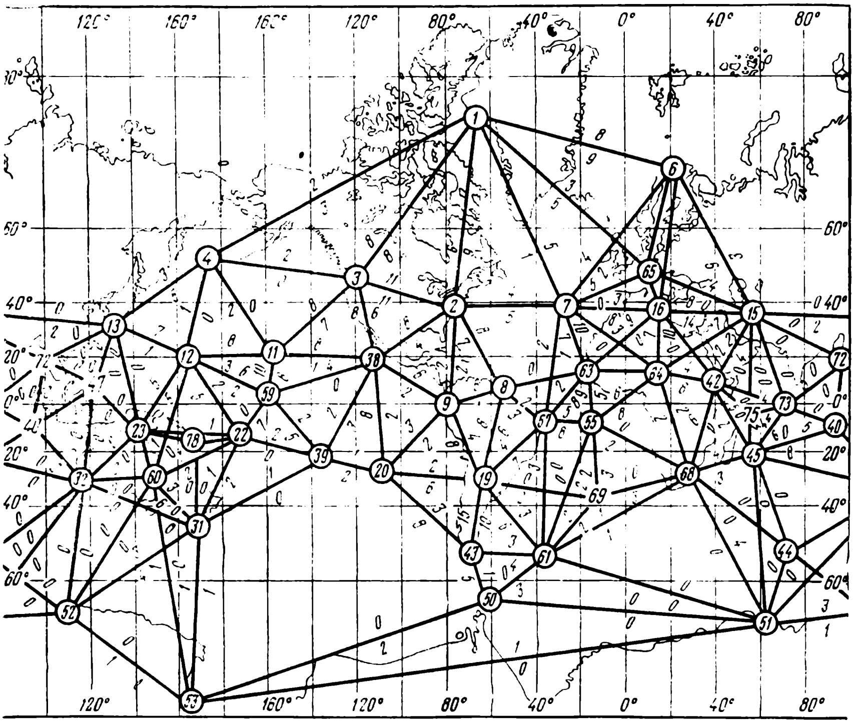

Рис. 58. Геодезическая сеть, построенная по проекту PAGEOS

Рига, Ужгород (СССР), Делфт (Нидерланды), Малверн (Англия), Циммервальд (Швейцария), а также 8 станций в Северной и Центральной Америке. Средние квадратические ошибки станций получились в интервале от 7 до 12 м.

Французский географический институт с 1963 по 1966 г. осуществил привязку Азорских островов с ошибкой 20 м, а также связал три пункта во Франции с двумя пунктами в Сахаре с относительной ошибкой геодезической связи порядка 1 : 100 000—1 : 150 000 (расстояние между пунктами 1000—1500 км).

В 1968—1969 гг. в рамках программы Европа — Африка выполнялись наблюдения с участием станций Верхний Прованс

(Франция) — Сан-Фернандо (Испания) — Дионисос (Греция), Рига, Ужгород, Звенигород (СССР), Дакар (Сенегал), Нджамена (Чад), Аддис-Абеба и Олифантфонтейне (станции SAO), Мадрид и Канарские острова (Испания) и советско-африканских станций в Сомали и АРЕ. Первые три станции образовали треугольник, для построения которого применялись лазерные наблюдения и который использовался в качестве базисного.

§ 2. Результаты решения динамических задач космической геодезии

После запуска первых искусственных спутников Земли ученые разных стран начали проводить эксперименты по определению параметров геопотенциала. В первую очередь удалось уточнить значение полярного сжатия Земли из определений зонального коэффициента J_2.

В дальнейшем была подтверждена эллиптическая форма экватора и обнаружена асимметрия северного и южного полушарий («грушевидность» Земли).

Наибольший интерес представляют значения параметров, характеризующих гравитационное поле Земли, полученные в процессе работы по определению «Смитсонианской Стандартной Земли 1966» [54] и «Смитсонианской Стандартной Земли II. 1969» [65], а также более поздние определения (Смитсонианская Стандартная Земля III. 1973 (SE III) [66] и др.

Приведем значения зональных гармоник, о которых доложил XV Генеральной ассамблее МГГС в Москве (1971 г.) Козаи, а также более поздние результаты Вагнера * (1972) и SE III (1973) (табл. 4).

Ошибки гармоник быстро возрастают с увеличением числа n. Ошибка, например, J_2 составляет несколько единиц последнего знака; для J_3 и J_4 ошибка составляет порядка 1% от основной величины; для J_5—J_{10} в ряде случаев достигает 100% от определяемой величины.

Козаи обнаружена годовая вариация J_2 с амплитудой $(1{,}3 \pm \pm 0{,}2) \cdot 10^{-9}$, однако этот вывод требует основательной проверки с привлечением более точных наблюдений, так как некоторые ученые ставят его под сомнение.

Достаточно надежными пока следует считать значения параметров с индексами n от 2 до 12—14. Уменьшение точности при увеличении номера гармоники обусловлено несовершенством современных теорий движения спутников, теорий определения коэффициентов геопотенциала, а также увеличением числа

---

* Wagner C. A. Earth zonal harmonics from rapid numerical analysis of long satellite arcs. Goddard Space Flight Center, 1972.

Таблица 4

Зональные гармоники

n	Козан $J_n \cdot 10^6$	Вагнер $J_n \cdot 10^6$	SE III $J_n \cdot 10^6$	n	Козан $J_n \cdot 10^6$	Вагнер $J_n \cdot 10^6$	SE III $J_n \cdot 10^6$
2	1082,637	1082,635	1082,637	12	—0,190	—0,208	—0,192
3	—2,539	—2,541	—2,541	13	—0,333	—0,101	—0,339
4	—1,617	—1,600	—1,618	14	+0,105	+0,166	+0,105
5	—0,234	—0,230	—0,228	15	+0,108	—0,072	+0,105
6	+0,555	+0,530	+0,552	16	+0,024	+0,003	+0,034
7	—0,348	—0,364	—0,352	17	—0,218	—0,204	—0,220
8	—0,209	—0,200	—0,205	18	—0,103	—0,086	—0,102
9	—0,159	—0,081	—0,154	19	+0,084	+0,047	+0,099
10	—0,240	—0,224	—0,237	20	—0,126	—0,085	—0,119
11	+0,323	+0,137	+0,312	21	—0,086	+0,015	—0,083

неизвестных в нормальных уравнениях и плохим разделением некоторых из них.

Самые первые определения незональных гармонических коэффициентов имели крайне низкую точность: ошибки определений многих из них имели порядок самих определяемых величин. Предварительный учет резонансных возмущений и их использование для определения коэффициентов резонансных гармоник позволили увеличить точность определений в несколько раз.

Значения незональных гармонических коэффициентов, полученные по наблюдениям ИСЗ Е. М. Гапошкиным и использованные при выводе «Стандартной Земли II. 1969», даны в табл. 5. Для сравнения в этой таблице помещены коэффициенты, характеризующие «Стандартную Землю III. 1973» (SE III).

Относительно надежно определены коэффициенты долготных гармоник. В то время, как для вывода незональных гармонических коэффициентов Е. М. Гапошкиным применялся спутниковый метод, для получения окончательных значений Смитсонианской астрофизической обсерваторией применялся комбинированный метод. Были использованы результаты фотографических и частично лазерных наблюдений на 28 станциях разных спутников с наклонами i от 28 до 114° вдоль орбитальных дуг на интервалах от 14 до 50 дней. Использовались также результаты 50 000 синхронных наблюдений спутников. Были привлечены к обработке и результаты определений долгот и расстояний до оси вращения Земли по наблюдениям за далекими космическими аппаратами. Использовались значения аномалий силы тяжести, осредненные по трапециям размером 300×300 миль.

Значения коэффициентов до 6-го порядка приведены в табл. 6. Во второй строчке для сравнения даны результаты чисто спутниковых определений Е. М. Гапошкина (1969 г.).

Таблица 5

Значение незональных гармонических коэффициентов

n	m	$\overline{C}_{nm}\cdot 10^6$ Е. М. Гапошкин	$\overline{C}_{nm}\cdot 10^6$ SE III	$\overline{S}_{nm}\cdot 10^6$ Е. М. Гапошкин	$\overline{S}_{nm}\cdot 10^6$ SE III
2	2	2,43	2,38	—1,39	—1,37
3	1	1,89	2,00	0,24	0,22
3	2	0,77	0,78	—0,69	—0,76
3	3	0,69	0,49	1,42	1,53
4	1	—0,62	—0,52	—0,46	—0,48
4	2	0,33	0,34	0,66	0,67
4	3	0,89	1,04	—0,16	—0,12
4	4	—0,13	—0,11	0,37	0,36
5	1	—0,07	—0,05	—0,06	—0,08
5	2	0,58	0,60	0,33	—0,40
5	3	—0,41	—0,58	0,07	—0,16
5	4	—0,29	—0,12	0,21	—0,05
5	5	0,10	0,14	—0,62	—0,87
6	1	—0,06	—0,07	0,02	0,02
6	2	0,01	0,02	0,40	—0,41
6	3	—0,05	0,00	0,01	0,03
6	4	0,01	—0,10	—0,45	—0,30
6	5	—0,30	—0,14	—0,46	—0,61
6	6	—0,11	—0,03	—0,21	—0,26
7	1	0,15	0,24	0,08	0,06
7	2	0,26	0,20	0,11	0,17
7	3	0,29	0,22	—0,17	—0,35
7	4	—0,24	—0,29	0,06	—0,28
7	5	—0,07	0,03	0,02	0,09
7	6	—0,10	—0,27	—0,05	0,09
7	7	0,01	—0,25	0,02	—0,09
8	1	—0,09	0,01	0,10	0,05
8	2	0,02	0,11	0,00	0,10
8	3	—0,04	—0,09	0,00	—0,05
8	4	—0,17	—0,22	—0,03	0,27
8	5	—0,21	0,15	0,00	0,08
8	6	—0,29	—0,10	0,19	0,28
8	7	0,05	0,21	—0,05	0,25
8	8	—0,19	0,17	0,26	0,09

Исследование точности комбинированного метода было выполнено с использованием средних аномалий силы тяжести, полученных по трапециям $5\times5°$ из наземных измерений. Они сопоставлялись с аномалиями силы тяжести, полученными комбинированным способом. Ошибка последних оказалась равной 10 мгал. Этой ошибке соответствует средняя квадратическая ошибка высоты геоида 3 м.

Одновременно с гармоническими коэффициентами были определены из наблюдений спутников геоцентрические координаты 12 станций, расположенных на разных материках. Ошибки координат станций оказались равными 5—10 м.

Таблица 6

Значения незональных гармонических коэффициентов $\overline{C}_{nm} \cdot 10^6$ и $\overline{S}_{nm} \cdot 10^6$

Метод \ n, m	2,2	3,1	3,2	3,3	4,1	4,2	4,3	4,4	5,1
Комбинированный	2,41	1,97	0,89	0,69	—0,53	0,33	0,99	—0,08	—0,05
	—1,36	0,26	—0,63	1,43	—0,49	0,71	—0,15	0,34	—0,10
Спутниковый	2,43	1,89	0,77	0,69	—0,62	0,33	0,89	—0,13	—0,07
	—1,39	0,24	—0,69	1,42	—0,46	0,66	—0,16	0,37	—0,06

Продолжение табл. 6

Метод \ n, m	5,2	5,3	5,4	5,5	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6
Комбинированный	0,61	—0,43	—0,27	0,13	—0,10	0,05	0,03	0,00	—0,21	0,09
	—0,35	0,09	0,08	—0,60	0,04	—0,35	0,04	—0,40	—0,52	—0,07
Спутниковый	0,58	—0,41	—0,29	0,10	—0,06	0,01	—0,05	0,01	—0,30	—0,11
	—0,33	0,07	0,21	—0,62	0,02	—0,40	0,01	—0,45	—0,46	—0,21

Наблюдения спутников позволили определить элементы ориентирования некоторых референц-эллипсоидов относительно системы параметров «Стандартная Земля II. 1969» (табл. 7).

Таблица 7

Элементы ориентирования геодезических систем координат в системе «Стандартная Земля II. 1969». [65]

Система координат	Референц-эллипсоид	Координаты центра референц-эллипсоида, м			Эйлеровы углы, сек		
		ΔX_0	ΔY_0	ΔZ_0	ψ_0	ϑ_0	ν_0
Североамериканская NAD	Кларка	31,8	—178,0	+177,6	—0,04	—0,32	—0,53
Европейская EUR	Хейфорда	—64,5	—168,1	—46,2	—0,20	—1,70	+1,40
Южноамериканская	—	—355,3	+194,3	—312,1	—1,40	1,20	—0,90

Последовательное уточнение параметров гравитационного поля Земли выполнялось в Годдардском центре космических полетов США. Результатом этих работ явилось шесть моделей гравитационного поля (Goddard Earth Model) GEM I—GEM VI. Следует отметить, что при выводе SEII и SEIII, а также GEMII, GEMIV и GEMVI наряду со спутниковыми наблюдениями широко использовались результаты наземных гравиметрических определений.

§ 3. Геофизические выводы, полученные на основе спутниковых наблюдений

Обширные материалы спутниковых наблюдений позволили сделать некоторые геофизические выводы. Было установлено, что положительные аномалии характерны для областей кайнозойской вулканической и тектонической активности. Отрицательные аномалии свойственны океаническим котловинам. Крупные внутриокеанические поднятия и материковые щиты характеризуются аномалиями, близкими к нулю.

Особенности гравитационного поля, характеризующиеся низкими гармониками, ученые связывают с особенностями строения верхней мантии. Установлена корреляция гармонических коэффициентов высокого порядка с соответствующими коэффициентами в разложении высот рельефа по сферическим функциям.

Фактически полученные аномалии силы тяжести не совпадают с аномалиями, полученными на основе теории изостазии. По мнению Каула, 15 млн. лет тому назад гидростатическая Земля имела сжатие, соответствующее сегодняшнему.

Анализ спутниковых наблюдений позволил заключить, что в мантии существуют конвективные течения со скоростью ~ 1 см/год.

Важное значение для изучения Земли как планеты имеют определения числа Лява k_2, характеризующего упругие свойства Земли. Это число по Ньютону равно $0{,}34 \pm 0{,}03$, по Козаи — $0{,}29 \pm 0{,}03$. Расхождения значений k_2 обусловлены приливными явлениями в океанах. Учет этого обстоятельства уменьшает разброс величин k_2. Ньютон предпринял также попытку определить замедление вращения Земли.

Создана специальная служба для изучения движения полюсов по наблюдениям ИСЗ. Полученные результаты свидетельствуют о больших возможностях использования спутников для определения положения полюсов. По наблюдениям трех спутников в течение пяти дней допплеровским методом Дальгреновская мониторная служба полярного движения (DMPS) определила координаты полюса с ошибкой 22 см.

§ 4. Основные направления и перспективы развития космической геодезии

Основные перспективы развития космической геодезии связаны с наметившейся возможностью повышения точности наблюдений спутников и космических аппаратов. В первую очередь это обусловлено применением лазерной техники, а также дальнейшим совершенствованием фотографической и радиотехнической аппаратуры.

Кроме того, методы космической геодезии в силу их общности пригодны не только для изучения Земли, но и для геодезического изучения Луны и планет Солнечной системы.

В настоящее время можно назвать следующие основные направления дальнейшего развития космической геодезии в отношении изучения Земли.

— Широкое внедрение в технику наблюдений лазерных дальномеров и дальнейшее совершенствование фотографической и радиоэлектронной аппаратуры, особенно допплеровской, с целью повышения точности наблюдений.

— Повышение точности относительных определений координат пунктов земной поверхности геометрическим методом, проложение векторных ходов типа Арктика — Антарктика как в широтном, так и в долготном направлениях, создание других космических геодезических построений.

— Дальнейшее уточнение координат пунктов земной поверхности в системе общего земного эллипсоида орбитальным методом.

— Разработка инструментов и методов для экспедиционных наблюдений ИСЗ с целью определения как относительных, так и абсолютных координат пунктов.

— Совершенствование метода «баллонной» триангуляции как средства для соединения глобальных космических геодезических построений с традиционными рядами и сетями триангуляции и полигонометрии, построенными в пределах отдельных ограниченных территорий.

— Уточнение известных параметров геопотенциала и определение и уточнение параметров с привлечением наземных гравиметрических и геодезических данных.

— Изучение вариаций параметров геопотенциала во времени.

— Определение и уточнение чисел Лява, характеризующих упругие свойства Земли, изучение приливных явлений в океанах.

— Дальнейшее изучение внутреннего строения Земли на основе интерпретации спутниковых наблюдений.

— Изучение движения материков и земных полюсов по результатам допплеровских и лазерных наблюдений ИСЗ.

— Изучение природных ресурсов; разработка методов пространственно-временной привязки результатов космических съемок [32].

— Дальнейшее уточнение фундаментальных постоянных геодезии и астрономии.

Исследуется вопрос о возможности использования высокоточных наблюдений ИСЗ для решения такой задачи фундаментальной астрометрии, как определение элементов ориентации и систематических ошибок звездных каталогов.

Все сказанное в той или иной мере относится к Луне и планетам Солнечной системы.

Наряду с дальнейшим развитием космической геодезии, основанном на повышении точности наблюдений, важное значение имеет совершенствование теоретических основ методов спутниковой геодезии и, в первую очередь, теорий движения ИСЗ. Должно быть обеспечено соответствие теории движения спутника и точности результатов наблюдений.

Наряду с разработкой аналитических теорий в практических приложениях должно уделяться внимание совершенствованию численных методов.

В теоретическом плане важное значение имеет установление оптимального соотношения между объемом спутниковых наблюдений и наблюдениями, которые выполняются традиционными наземными методами. Это имеет особо важное значение при изучении, например, структуры гравитационного поля Земли.

Если исходить из концепции континентального дрейфа, учитывать процесс перераспределения масс в теле Земли и изменение солнечной активности, то можно утверждать о необходимости систематических повторных высокоточных наблюдений спутников и других небесных объектов как для решения координатной проблемы (относительные и абсолютные определения координат пунктов), так и для определения параметров гравитационного поля Земли и параметров атмосферы.

Большие перспективы при решении задач космической геодезии, селенодезии, фундаментальной астрометрии и звездной астрономии открываются в связи с применением метода лазерной локации Луны, планет, стационарных спутников Земли. Применение лазерной локации требует установки на упомянутых объектах лазерных отражателей [42].

Новые возможности для изучения вращения Земли, дрейфа континентов, установления связи между разными геодезическими системами и решения ряда других задач дает использование радиоинтерферометров с большой базой. Радиоинтерферометрия на основе наблюдений точечных радиоисточников, кроме решения задач геодезии, дает возможность решать проблемы астрометрии, астрофизики, физики и геофизики [42].

Перспективность названных методов базируется на высокой точности наблюдений. Так, например, точность измерения расстояний до уголковых отражателей, установленных на Луне, в ближайшее время предполагается довести до 10—15 см. Радиоинтерферометры обладают высокой разрешающей способностью от 0,001 до 0,0001″.

В заключение подчеркнем, что дальнейшее развитие космической геодезии как раздела науки, создающего основу для изучения окружающего нас мира, приближает к раскрытию многих неразгаданных тайн природы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов Е. П. Движение спутника осесимметричной планеты.— Труды Государственного астрономического института имени П. К. Штернберга, вып. 35, 1966, с. 59—93 с ил.

2. Амелин В. М. Методы использования Луны для геодезических целей.—Бюл. ИТА АН СССР, т. VI, № 1, (84), М.—Л., 1958, с. 19—42 с ил.

3. Арнольд К. Методы спутниковой геодезии.—Перев. с нем. М., «Недра», 1973, 224 с. с ил.

4. «Астрономический ежегодник СССР».

5. Батраков Ю. В. Возмущения орбитальных элементов спутника Земли от зональных гармоник произвольного порядка. — Бюл. ИТА АН СССР. т. XII, № 9 (42), 1971, с. 843—847 с ил.

6. Батраков Ю. В. Определение взаимного положения наблюдательных станций при помощи искусственных спутников. АЖ, т. 2, № 1, 1965, с. 195—202 с ил.

7. Батраков Ю. В., Филенко Л. Л. Движение спутника Земли под действием возмущений от тессеральных гармоник. — Бюл. ИТА АН СССР, т. 13, № 2 (145), 1972, с. 73—91 с ил.

8. Беррот А., Хофманн В. Космическая геодезия.— Перев. с нем. М., ИЛ, 1963, 410 с. с ил.

9. Бойко Е. Г., Кленицкий Б. М. и др. Построение, уравнивание и оценка точности космических геодезических сетей. М., «Недра», 1972, 208 с. с ил.

10. Бойков В. В., Устинов Г. А. К вопросу определения координат пунктов космической геодезической сети орбитальным методом. — Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 5, 1972, 24 с ил.

11. Брумберг В. А. Представление координат планет тригонометрическими рядами.— Труды ИТА АН СССР, вып. II, 1966, с. 3—88 с ил.

12. Брумберг В. А. Разложение пертурбационной функции в спутниковых задачах.— Бюл. ИТА АН СССР т. XI, № 2 (125), 1967, с. 13—83 с ил.

13. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. М., «Наука», 1972, с. 13—44 с ил.

14. Бурша М. Основы космической геодезии. — Перев. с чешск. М., «Недра», 1971, 128 с. с ил.

15. Буткевич А. В. Об использовании наблюдений искусственных спутников Земли для некоторых целей высшей геодезии. — Труды Новосибирского ин-та инж. геодезии, аэрофотосъемки и картографии, вып. XVII, № 1, 1963, с. 129—141 с ил.

16. Вейс Г. М. Геодезическое использование искусственных спутников Земли. — Перев. с англ. М., «Недра», 1967, 116 с. с ил.

17. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971, 1108 с. с ил.

18. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике. М., «Наука», 1971, 442 с. с ил.

19. Дейч А. Н. К вопросу о редукции фотографических положений при произвольном оптическом центре. АЖ, т. X, IX, вып. 1965, 114 с. с ил.

20. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1965, 560 с. с ил.

21. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., «Наука», 1968, 799 с. с ил.

22. Егорова А. В. Влияние притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ. — В сб.: «Искусственные спутники Земли», АН СССР, вып. 8, 1961, с. 46—56 с ил.

23. Жонголович И. Д. Космическая триангуляция.— В сб. «Проблемы астрономии и геодезии. М., «Наука», 1970, с. 83—102 с ил.

24. Жонголович И. Д. Проект геодезического векторного хода Арктика — Антарктика. — Бюл. «Ст. оптич. наблюд. ИСЗ», № 57, 1970, с. 14—20 с ил.

25. Жонголович И. Д. Проект единой мировой космической триангуляции.— Бюл. «Ст. оптич. набл. ИСЗ». № 2, 1965, с. 185—200 с ил.

26. Жонголович И. Д. Спутники Земли и геодезия. АЖ, т. 38, вып. 1, 1961, с. 115—124 с ил.
27. Жонголович И. Д. Спутники Земли и геодезия. АЖ, т. 41, вып. 1, 1964, с. 156—169 с ил.
28. Изотов А. А. К теории определения фигуры и размеров Земли по наблюдениям искусственных спутников. — Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», № 3, 1965, с. 3—11 с ил.
29. Каула У. М. Космическая геодезия.— Перев. с англ. М., «Недра», 1965, 162 с. с ил.
30. Каула У. М. Спутниковая геодезия. Теоретические основы. — Перев. с англ. М., «Мир», 1970, 172 с. с ил.
31. Киселев А. А., Фираго Б. А., Щеголев Д. Е. Инструкция по определению координат ИСЗ по фотографическим снимкам, полученным на камерах НАФА-30/25. БСОН ИСЗ, № 3 (13), М., 1960, 53 с. с ил.
32. Красноры лов И. И., Урмаев М. С. К теории пространственно-временной привязки результатов космических съемок. — Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», вып. 2, 1975, с. 91—101 с ил.
33. Краснорылов И. И., Урмаев М. С. Космическая геодезия, раздел «Справочника геодезиста», М., «Недра», 1975, с. 187—258 с ил.
34. Куликов К. А. Новая система астрономических постоянных. М., «Недра». 1969, 91 с. с ил.
35. Курс астрофизики и звездной астрономии, т. I. Под ред. Михайлова А. А. М., «Наука», 1973, 608 с. с ил.
36. Ландау Л. Д. Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. т. I, Механика. М., «Наука», 1968, 206 с. с ил.
37. Масевич А. Г., Лозинский А. М. Фотографические наблюдения искусственных спутников Земли. — Научные информации, вып. 18, М., 1970, с. 3—36 с ил.
38. Меллер И. Введение в спутниковую геодезию. М., «Мир», 1967, 367 с. с ил.
39. Основы спутниковой геодезии. Под ред. Изотова А. А. М., «Недра», 1974, 320 с. с ил.
40. Основы теории полета космических аппаратов. Под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова. М., «Машиностроение», 1972, 607 с. с ил.
41. Пеллинен Л. П. Геодезическое использование искусственных спутников Земли. — В сб. «Геодезия. Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР». М., 1967, с. 7—68 с ил.
42. Пеллинен Л. П. Исследование гравитационных полей и формы Земли, других планет и Луны по наблюдениям космических аппаратов. — В сб.: «Геодезия. Итоги науки. Исследование космического пространства». М., 1972, 178 с. с ил.
43. Пеллинен Л. П., Егоров В. Б. Успехи космической геодезии (по материалам XIII сессии КОСПАР, Ленинград, май, 1970 г.). Обзор. № 10, М., ОНТИ ЦНИИГАиК, 1970, 44 с. с ил.
44. Плахов Ю. В. О вычислении возмущений высших порядков в движении небесных тел.— Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка», № 5, 1972, с. 61—66 с ил.
45. Плахов Ю. В. О разложении пертурбационной функции планеты. — Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка», № 1, 1975, с. 45—48 с ил.
46. Подобед В. В. Фундаментальная астрометрия. М., «Наука», 1968, 340 с. с ил.
47. Полежаев А. П. Использование искусственных спутников Земли в геодезических целях за рубежом. ОНТИ ЦНИИГАиК, 1968, 111 с. с ил.
48. Поляхова Е. Н. Применение метода Гаусса к определению вековых радиационных возмущений искусственных спутников Земли.— Бюл. ИТА АН СССР, 13, № 5 (148), 1972, с. 308—317 с ил.
49. Поповичи К. Определение координат центра масс Земли.— Наблюдения ИСЗ. № 2, Варшава, 1963, с. 42—44 с ил.

50. Поповичи К. Применение круга одновременности при решении некоторых проблем пространственной геодезии.— Наблюдения ИСЗ, № 3, Берлин, 1964, с. 205—208 с ил.
51. Разумов О. С. Пространственная геодезическая векторная сеть. М., «Недра», 1974, 160 с. с ил.
52. Сиверс А. П. Основы космической радиоэлектроники. М., «Советское радио», 1969, 312 с. с ил.
53. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, под ред. Г. Н. Дубошина. М., «Наука», 1971, 584 с. с ил.
54. Стандартная Земля. Геодезические параметры Земли на 1966 г. Под ред. К. Лунквиста и Г. Вейса. М., «Мир», 1969, 277 с. с ил.
55. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., «Наука», 1968, 800 с. с ил.
56. Троицкий В. С. Радиоастрономический метод измерений расстояний между континентами и сверки часов. — Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», № 1, 1970, с. 112—120 с ил.
57. Урмаев М. С. Математическая обработка результатов измерений в орбитальном методе космической геодезии. — Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», № 5, 1972, с. 7—16 с ил.
58. Фираго Б. А. Космическая триангуляция методом астрометрии спутников Земли. АЖ, т. 46, № 1, 1969, с. 180—191 с ил.
59. Фоминов А. М. Вековые и долгопериодические возмущения первого порядка в движении искусственных спутников, вызываемые сопротивлением атмосферы. — Бюлл. ИТА АН СССР, т. 13, № 7 (150), 1973, с. 422—423 с ил.
60. Эскобал П. Р. Методы определения орбит. М., «Мир», 1970, 471 с. с ил.
61. Arnold K. Zur Bestimmung geodätischer Azimut aus Simultanbeobachtungen von Satelliten. «Gerlands Beitr. Geophys», 1965, 74, N 6, p. 441—450.
62. Brower D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. Astron. J., 1959, V. 64, N 9 (1274), p. 378—397.
63. Cichowicz L. Satellite spherical astronomy. Politechnika Warszawska. Zeszyty Naukowe. N 129, Geodezja, N 19, Warszawa, 1966, p. 89—130.
64. Gaposchkin E. M., Kozai Y., Weifenbach G. Geodetic studies at the SAO, presented at the XY—th IUGG Gen. As., M., 1971, p. 1—11.
65. Gaposhkin E. M., Lambeck K. 1969 Smithsonian Standart Earth (II), SAO Special Report, 1970, N 315, p. 95.
66. Gaposchkin E. M., Williamson M. R., Kozai Y., Mendes G. Smithsonian Institution Standard Earth III (geopotential al). Spec. Rept. Smithsonian Astrophys. Observ.», 1973, N 353, p. 233—308.
67. Husson J. C. Application de la methode de localisation Doppler au satellite DiA. «Navigation», 1967, V. 15, N 58, p. 143—158.
68. Kakkuri J. Stellar Triangulation with balloon—borne. «Veröff. Finn. Geod. Inst.», N 76, Helsinki, 1973.
69. Kaula W. M. Tesseral harmonics of the earth's gravitational field from camera tracking of satellites. G. of Geophys. Res. 1966, v. 71, N 18, p. 4377—4388.
70. Kozai Y. Effects of solar Radiation Pressure on the Motion an Artificial Satellite., SAO Spec. Rep., 56, 1961, p. 25—33.
71. Kozai Y. New determination of zonal harmonics coefficients of the Eath's gravitational potential, SAO Special Report, 165, 1964, p. 32.
72. Kozai Y. The motion of a close earth satellite, Astron. G. 1959, v. 64, N 9 (1274), p. 367—377.
73. Kozai Y. Second order solution of artificial satellite theory withought air drag., Astron. G., 67, 7, 1962, p. 446—461.
74. Väisälä. An astronomical method of triangulation. — Sitzungsberg. d. Finnischen Akad. d. Wiss., 1947, p. 99—107.
75. Väisälä und Oterma. Anwendung der astronomischen Triangulations methode. «Veroffent. d. Finn. Geod. Institutes», 1960, N 53, p. 1—21.

ОГЛАВЛЕНИЕ